Санкт Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Академия управления городской средой, градостроительства и печати»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебно-методической работе
_____________ О.В. Фомичёва
«__» _______________ 20__г.

Методические рекомендации к выполнению практических работ

ОД.03 МАТЕМАТИКА

для специальностей технологического профиля

Санкт-Петербург
2023г.

Разработчики:

Дубоделова О.А. преподаватель математики ГБПОУ АУГСГиП

Одобрена на заседании цикловой комиссии

Математики и информационных технологий

Протокол № 11

«07» 06 2023 г.

Председатель цикловой комиссии

_____________________________ И.А. Минько

1. Пояснительная записка

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических умений и формирования общих компетенций.

Освоение содержания учебной дисциплины обеспечивает достижение студентами следующих ***результатов***:

ЛИЧНОСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Личностные результаты освоения программы учебного предмета «Математика» характеризуются:

Гражданское воспитание:

- сформированностью гражданской позиции обучающегося как активного и ответственного члена российского общества, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (выборы, опросы и пр.), умением взаимодействовать с социальными институтами в соответствии с их функциями и назначением .

Патриотическое воспитание:

- сформированностью российской гражданской идентичности, уважения к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках, технологиях, сферах экономики .

Духовно-нравственного воспитания:

- осознанием духовных ценностей российского народа; сформированностью нравственного сознания, этического поведения, связанного с практическим применением достижений науки и деятельностью учёного; осознанием личного вклада в по- строение устойчивого будущего .

Эстетическое воспитание:

- эстетическим отношением к миру, включая эстетику математических закономерностей, объектов, задач, решений, рассуждений; восприимчивостью к математическим аспектам различных видов искусства .

Физическое воспитание:

- сформированностью умения применять математические знания в интересах здорового и безопасного образа жизни, ответственного отношения к своему здоровью (здоровое питание,

- сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность); физического совершенствования, при занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью .

Трудовое воспитание:

- готовностью к труду, осознанием ценности трудолюбия; интересом к различным сферам профессиональной деятельности, связанным с математикой и её приложениями, умением совершать осознанный выбор будущей профессии и реализовывать собственные жизненные планы; готовностью и способностью к математическому образованию и самообразованию на протяжении всей жизни; готовностью к активному участию в решении практических задач математической направленности .

Экологическое воспитание:

- сформированностью экологической культуры, пониманием влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды, осознанием глобального характера экологических проблем; ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды .

Ценности научного познания:

- сформированностью мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации; овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира; готовностью осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе .

МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Метапредметные результаты освоения программы учебного предмета «Математика» характеризуются овладением универсальными познавательными действиями, универсальными коммуникативными действиями, универсальными регулятивными действиями.

Универсальные познавательные действия, обеспечивают формирование базовых когнитивных процессов обучающихся (освоение методов познания окружающего мира; применение логических, исследовательских операций, умений работать с информацией) .

Базовые логические действия:

– выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятия- ми; формулировать определения понятий; устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа;

– воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие; условные;

– выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях; предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий;

– делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии;

– проводить самостоятельно доказательства математических утверждений (прямые и от противного), выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; обосновывать собственные суждения и выводы;

– выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев).

Базовые исследовательские действия:

– использовать вопросы как исследовательский инструмент познания; формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;

– проводить самостоятельно спланированный эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, явления, процесса, выявлению зависимостей между объектами, явлениями, процессами;

– самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;

– прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях .

Работа с информацией:

– выявлять дефициты информации, данных, необходимых для ответа на вопрос и для решения задачи;

– выбирать информацию из источников различных типов, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления;

– структурировать информацию, представлять её в различных формах, иллюстрировать графически;

– оценивать надёжность информации по самостоятельно сформулированным критериям .

Универсальные коммуникативные действия, обеспечивают сформированность социальных навыков обучающихся.

Общение:

– воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения; ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат;

– в ходе обсуждения задавать вопросы по существу обсуждаемой темы, проблемы, решаемой задачи, высказывать идеи, нацеленные на поиск решения; сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций; в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения;

– представлять результаты решения задачи, эксперимента, исследования, проекта; самостоятельно выбирать формат выступления с учётом задач презентации и особенностей ауди- тории .

Сотрудничество:

– понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных задач; принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы, распределять виды работ, договариваться, обсуждать процесс и результат работы; обобщать мнения нескольких людей;

– участвовать в групповых формах работы (обсуждения, обмен мнений, «мозговые штурмы» и иные); выполнять свою часть работы и координировать свои действия с другими членами команды; оценивать качество своего вклада в общий продукт по критериям, сформулированным участниками взаимодействия.

Универсальные регулятивные действия, обеспечивают формирование смысловых установок и жизненных навыков личности .

Самоорганизация:

– составлять план, алгоритм решения задачи, выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей, аргументировать и корректировать варианты решений с учётом новой информации .

Самоконтроль:

– владеть навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов; владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи;

– предвидеть трудности, которые могут возникнуть при решении задачи, вносить коррективы в деятельность на основе новых обстоятельств, данных, найденных ошибок, выявленных трудностей;

– оценивать соответствие результата цели и условиям, объяснять причины достижения или недостижения результатов деятельности, находить ошибку, давать оценку приобретённому опыту.

***предметных*:**

Математика (включая разделы «Алгебра и начала математического анализа», «Геометрия», «Вероятность и статистика») (базовый уровень) - требования к предметным результатам освоения базового курса математики должны отражать:

- владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

- умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

- умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

- умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

- умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;

- умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов;

- умение оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств;

- умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

- умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;

- умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; знакомство с симметриями в пространстве; знакомство с правильными многогранниками;

- умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объёмов подобных фигур при решении задач;

- умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

- умение оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками;

- умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

Математика (включая разделы «Алгебра и начала математического анализа», «Геометрия», «Вероятность и статистика») **(углубленный уровень)** - требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

- умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;
- умение оперировать понятиями: множество, подмножество, операции над множествами; умение использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений и при решении задач, в том числе из других учебных предметов;
- умение оперировать понятиями: граф, связный граф, дерево, цикл, граф на плоскости; умение задавать и описывать графы различными способами; использовать графы при решении задач;
- умение свободно оперировать2 понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач;
- умение оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать признаки делимости, НОД и НОК, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления;
- умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;
- умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром;применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;
- умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: чётность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;
- умение свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая

прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; умение задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул;

- умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; знакомство с математическим моделированием на примере дифференциальных уравнений;

- умение оперировать понятиями: комплексное число, сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа, форма записи комплексных чисел (геометрическая, тригонометрическая и алгебраическая); уметь производить арифметические действия с комплексными числами; знакомство с использованием комплексных чисел;

- умение свободно оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение для описания числовых данных; умение исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии;

- умение находить вероятности событий с использованием графических методов; применять для решения задач формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; оценивать вероятности реальных событий;

- умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений; умение использовать свойства изученных распределений для решения задач; знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

- умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

- умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объём фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объёмов подобных фигур;
- умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;
- умение свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; знакомство с понятиями: матрица 2x2 и 3x3, определитель матрицы, геометрический смысл определителя;
- умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;
- умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения.

Практические задания выполняются обучающимся самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания.

К практическому занятию от обучающегося требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, обучающийся получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика».

2. Оценка практических работ

1. Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой. При проверке усвоения материала нужно выявлять полноту, прочность усвоения обучающимися теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

2. Оценка зависит от наличия и характера погрешностей, допущенных обучающимся при выполнении практических работ.

3. Среди погрешностей выделяются ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что обучающийся не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или об отсутствии знаний, не считающихся в программе основными. Недочетами также считаются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного учеником задания или способа его выполнения; неаккуратная запись; небрежное выполнение чертежа.

Граница между ошибками и недочетами является в некоторой степени условной. При одних обстоятельствах допущенная обучающимся погрешность может рассматриваться учителем как ошибка, в другое время и при других обстоятельствах — как недочет.

4. Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, правильно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

5. Преподаватель может повысить отметку за оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им заданий.

Критерии оценки ошибок

- К грубым ошибкам относятся ошибки, которые обнаруживают незнание учащимися формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять; незнание приемов решения задач, рассматриваемых в учебниках, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской;

- К н е г р у б ы м ошибкам относятся: потеря корня или сохранение в ответе постороннего корня; отбрасывание без объяснений одного из них и равнозначные им;
- К н е д о ч е т а м относятся: нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях

Критерии оценки практических работ

Отметка «5» ставится, если:
- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:
- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:
допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:
допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере

Отметка «1» ставится, если:
работа показала полное отсутствие у обучающегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

Оценку по каждой практической работе обучающийся получает после её выполнения, а также после ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

3. Методические рекомендации к выполнению практических работ

Раздел 1. Повторение курса математики основной школы

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Виды плоских фигур и их площади

Площадь треугольника

$S=\frac{1}{2}a\cdot h$, где a - сторона треугольника, h - высота, проведенная к этой стороне.

$S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$, где a,b - стороны треугольника, γ - величина угла между ними.

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона), где a,b,c - стороны треугольника,

$p=\frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника.

$S=r\cdot p$, где r - радиус вписанной окружности, $p=\frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника.

$S=\frac{abc}{4R}$, где a,b,c - стороны треугольника, R - радиус описанной окружности.

Площадь прямоугольного треугольника

$S=\frac{1}{2}a\cdot b$, где a,b - катеты треугольника.

Площадь равностороннего треугольника

$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a - сторона треугольника.

Площадь параллелограмма

$S=a\cdot h$, где a - сторона параллелограмма, h - высота, проведенная к этой стороне.

$S=a\cdot b\cdot\sin\gamma$, где a,b - стороны параллелограмма, γ - величина угла между ними.

Площадь прямоугольника

$S=a\cdot b$, где a,b - стороны прямоугольника.

Площадь квадрата

$S=a\cdot a=a^2$, где a - сторона квадрата.

Площадь ромба

$S=a^2\sin\gamma$, где a - сторона ромба, γ - величина угла ромба.

$S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$, где d_1,d_2 - диагонали ромба.

Площадь трапеции

$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$, где a,b - основания трапеции, h - высота трапеции.

Площадь правильного многоугольника

$S=\frac{1}{2}P\cdot r$, где P - периметр, r - радиус вписанной окружности.

$S=\frac{1}{2}n\cdot a\cdot r$, где a - сторона многоугольника, r - радиус вписанной окружности, n - число сторон.

$S=\frac{1}{2}R^2\cdot n\cdot \sin\frac{360^0}{n}$, где R - радиус описанной окружности, n - число сторон многоугольника.

$S=\frac{1}{4}a^2\cdot n\cdot \mathrm{ctg}\frac{360^0}{2n}$, где a - сторона многоугольника, n - число сторон.

Также удобно использовать, что $R=\frac{a}{2\sin\left(\frac{360^0}{2n}\right)}$, $r=\frac{a}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{360^0}{2n}\right)}$.

Площадь круга

$S=\pi r^2$, где r - радиус круга

Площадь кругового сектора

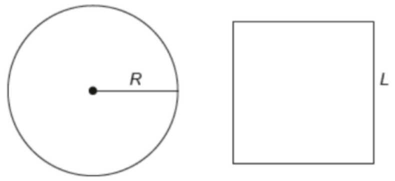
$S=\frac{r^2\alpha}{2}$, где r - радиус круга, α - центральный угол сектора (радианы).

Площадь эллипса

$S=\pi ab$, где a,b - полуоси эллипса.

Пример

Стекольщику необходимо изготовить стеклянные столешницы разного формата, но с одинаковыми размерами площадей. Для этого он просит друга помочь ему определить формулу для расчета радиуса R круглой стеклянной крышки с площадью, равной площади квадратной стеклянной крышки со стороной L.



Дано: S квадратной столешницы = S круглой столешницы
L – сторона квадратной столешницы
Найти: R круглой столешницы
Решение:
Определим площадь квадратной столешницы со стороной L
$S = L^2$
По условию задачи S квадратной столешницы = S круглой столешницы, значит можно записать следующее
$L^2 = \pi R^2$
Из этого равенства выразим радиус R

$$R = \sqrt{\frac{L^2}{\pi}}$$

Простые проценты, разные способы вычисления. Сложные проценты

Простые проценты — метод расчета процентов, при котором начисления происходят на первоначальную сумму вклада (долга).
Простыми процентами можно считать вклад (долг) только в том случае, если происходит однократная выплата процентов и всей суммы вклада (долга) одновременно, при этом полностью отсутствует возможность досрочной частичной или полной выплаты вклада (долга) и/или полностью отсутствует возможность продления вклада (долга).

Формула для расчета простых процентов по вкладу:
$\boldsymbol{A = P \times (1 + I \times T)}$,
где T - количество периодов
I - процентная ставка
P - вкладываемая сумма
A - получаемая сумма

Пример

Вкладчик вложил 300 000 рублей при простой ставке 4% годовых. Рассчитайте, какая сумма будет на его лицевом счёте через 3 года; 5 лет; 10 лет.
Решение
В данной задаче необходимо вычислить A, если P = 300000 рублей, I = 4% = 0,04, T = 3; 5; 10 лет. Подставив данные в формулу, получим:
$A = 300\,000 \times (1 + 0{,}04 \times 3) = 336\,000$ (руб.)
Аналогично вычислим для T = 5 и 10 лет.
$A = 300\,000 \times (1 + 0{,}04 \times 5) = 360\,000$ (руб.)
$A = 300\,000 \times (1 + 0{,}04 \times 10) = 420\,000$ (руб.)
Ответ
Через 3 года на лицевом счёте вкладчика будет 336 000 рублей, через 5 лет – 360 000 рублей, через 10 лет – 420 000 рублей.

Формула для расчета простых процентов по кредиту:
$\mathbf{S_n = S_0 \times (1 + \frac{r}{100} \times n)}$,
где S_0 - сумма долга
S_n - сумма долга с процентами
r - ставка процента за период (обычно за 1 год, но могут использоваться и другие периоды)
n - число периодов начисления

Пример

Заёмщик взял в кредит 100 000 рублей и должен вернуть его через пять лет. Процентная ставка кредита составляет 34%. Рассчитайте, сколько рублей нужно отдать банку.
Решение
В данной задаче необходимо вычислить S_n, если S_0 = 100 000 рублей, r = 34%, n = 5 лет. Подставив данные в формулу, получим:
$S_n = 100\,000 \times \left(1 + \frac{34}{100} \times 5\right) = 270\,000$ (руб.)

Ответ
Заёмщик должен будет вернуть банку 270 000 рублей.

Если ставка выражена в годовых процентах, а проценты надо рассчитать за период меньше, чем год, то при использовании формулы простых процентов необходимо разделить годовую ставку на количество дней в году (обычно 365 или 366, иногда используется и условная величина 360 дней) и умножить на фактическое количество дней пользования заемными средствами, начиная со дня, следующего за днем получения средств:

$$\boldsymbol{S_m = S_0 \times \left(1 + \frac{r}{100} \times \frac{m}{365}\right)},$$

где S_0 - сумма долга
S_m - сумма долга с процентами
r - годовая ставка процента
m - фактическое количество дней пользования заёмными средствами

Пример

Заёмщик получил кредит на сумму 100 000 рублей под 34% годовых. Через 240 дней кредит был полностью погашен. Рассчитайте, какую сумму заёмщик отдал банку? Результат округлить до сотых.
Решение
В данной задаче необходимо вычислить S_m, если S_0 = 100 000 рублей, r = 34%, m = 240 дней. Подставив данные в формулу, получим:

$$S_m = 100\,000 \times \left(1 + \frac{34}{100} \times \frac{240}{365}\right) = 122\,440 \text{ (руб.)}$$

Ответ
Заёмщик отдал банку 122 440 рублей.

Сложный процент – явление куда более интересное в финансовом мире. Это процент, при котором прибыль суммируется с основной суммой и в дальнейшем уже сама производит новую прибыль. Если говорить еще проще, это начисление процентов на начисленные проценты. Получается, что с каждым расчетным периодом эти начисленные проценты все увеличиваются и увеличиваются. Накопления нарастают как снежный ком.

Формула для начисления сложного процента по вкладу:

$$\boldsymbol{S = A \times (1 + R)^T},$$

где A – сумма вклада
R – ставка процента
T – количество периодов
S – получаемая сумма

Пример

Рассчитать сумму вклада через 3 года при сложной процентной ставке 10% годовых, если было вложено 1000 рублей.
Решение
В этой задаче исходными данными являются: A = 1000 рублей, T = 3 года, R = 10% = 0,1.
Подставив эти данные в формулу, получим:

$$S = 1000 \times (1 + 0{,}1)^3 = 1331 \text{ (руб)}$$

Ответ
На счёте через три года будет 1331 рубль.
Формула для начисления сложного процента по кредиту:

$$\boldsymbol{S_n = S_0 \times (1 + \frac{r}{100})^n},$$

где S_0 - сумма долга

S_n - сумма долга с процентами

r - ставка процента за один период (обычно за 1 год, но могут использоваться и другие периоды)

n - число периодов начисления

Пример

Елена взяла заём у соседки Светланы на сумму 50 000 рублей сроком на 3 года, ставка 10% годовых, проценты сложные, погашение займа вместе с процентами в конце срока. Какую сумму выплатит Елена при погашении займа?

Решение

В данной задаче необходимо вычислить S_n, если S_0 = 50000 рублей, r = 10%, n = 3 года. Подставив данные в формулу, получим:

$$S_n = 50000 \times (1 + \frac{10}{100})^3 = 66550 \text{ (руб)}$$

Ответ

Елена выплатит 66550 рублей при погашении займа.

Если ставка выражена в годовых процентах, а проценты надо рассчитать за период меньше, чем год, то при использовании формулы сложных процентов необходимо найти условную однодневную ставку, для чего из величины (1+ r/100) извлекается корень 365 или 366 степени. А потом эта величина возводится в степень, соответствующую фактическому количеству дней пользования заемными средствами (понятно, что это можно сделать только с использованием вычислительной техники). Тогда формула будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{S_m = S_0 \times (1 + \frac{r}{100})^{\frac{m}{365}}},$$

где S_0 - сумма долга

S_m - сумма долга с процентами

r - годовая ставка процента

m - фактическое количество дней пользования заёмными средствами

Пример

Индивидуальный предприниматель 01.04.2019 г. взял кредит на сумму 150 000 рублей сроком на 1 год, ставка 25% годовых, проценты выплачиваются ежеквартально, начисление производится по сложной ставке. Какую сумму уплатит предприниматель за первые 3 месяца?

Решение

В данной задаче необходимо вычислить S_m, если S_0 = 150000 рублей, r = 25%, m = 91 день. Подставив данные в формулу, получим:

$$S_m = 150000 \times \left(\left(1 + \frac{25}{100}\right)^{\frac{91}{365}} - 1\right) = 8581{,}45 \text{ (руб)}$$

Ответ

8581,45 рубль уплатит Даниил за первые 3 месяца.

Линейные, квадратные, дробно-линейные уравнения и неравенства

Решение линейных уравнений

Уравнения вида $ax + b = 0$, где a и b – некоторые числа, а также приводимые к ним называются уравнениями 1-й степени.
а) Если $a \neq 0$, то уравнение называется линейным. Линейное уравнение всегда имеет 1 корень: $x = -b/a$
б) Если $a = 0$, то возможны два случая:
1. $b = 0$, тогда $0 \cdot x + 0 = 0$. Здесь x может быть любым числом.
2. $b \neq 0$, тогда $0 \cdot x + b = 0$. Здесь нет решений.

Пример

1) $5x – 40 = 0$
$5x = 40$
$x = 8$
Ответ: 8

2) $18x – 24 = 15x + 3$
$18x – 15x = 3 + 24$
$3x = 27$
$x = 9$
Ответ: 9

3) $2/3\ x – 4 = 1/5\ x + 3 \mid \cdot 15$
$10x – 60 = 3x + 45$
$10x – 3x = 45 + 60$
$7x = 105$
$x = 15$
Ответ: 15

Решение квадратных уравнений

Уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$, а также приводимые к ним называются квадратными.
Если $a = 0$, то уравнение становится линейным. Если b или c (или оба) равны нулю, то это уравнение называется неполным.

Неполные квадратные уравнения

Уравнения вида $x^2 = m$ и приводимые к ним
1) Если $m > 0$, то уравнение имеет два корня: $\sqrt{m}$ и $-\sqrt{m}$
2) Если $m = 0$, то уравнение имеет один корень: 0
3) Если $m < 0$, то уравнение не имеет действительных корней

Пример

1) $x^2 = 49$
$x = \pm\sqrt{49}$
$x = \pm 7$
Ответ: ± 7

2) $2x^2 = -8$
$x^2 = -4$
Нет корней
Ответ: Ø

Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ и приводимые к ним
В левой части этого уравнения есть общий множитель x. Вынесем общий множитель за скобки, получим: $x(ax + b) = 0$. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому получаем два уравнения: $x = 0$, $ax + b = 0$. Таким образом, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -b/a$.

Пример

1) $2x^2 + 5x = 0$
$x(2x + 5) = 0$
$x = 0$ или $2x + 5 = 0$
$2x = -5$
$x = -2,5$
Ответ: – 2,5; 0

2) $(2x - 1)^2 - 1 = x(x + 2)$
$4x^2 - 4x + 1 - 1 = x^2 + 2x$
$3x^2 - 6x = 0$
$x^2 - 2x = 0$
$x(x - 2) = 0$
$x = 0$ или $x - 2 = 0$
$x = 2$
Ответ: 0; 2

Полные квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и приводимые к ним

Корни такого уравнения находятся по формуле:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
При этом возможны три случая:
1) $b^2 - 4ac > 0$, тогда имеются два различных корня
2) $b^2 - 4ac = 0$, тогда имеются два равных корня
3) $b^2 - 4ac < 0$, тогда уравнение не имеет действительных корней.
Выражение $b^2 - 4ac$, от значения которого зависит, какой случай имеет место, называется дискриминантом квадратного уравнения и обозначается через D.

Пример

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2 \cdot 1}$
$x_1 = 4$, $x_2 = 1$
Ответ: 1; 4

2) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25, \sqrt{25} = 5$

$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$

$x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

Ответ: − 2; 0,5

Дробно-рациональные уравнения, алгоритм их решения

Уравнения, в которых левая и/или правая часть являются дробно-рациональными выражениями, называются дробными рациональными уравнениями. Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

1) записать ОДЗ
2) найти наименьший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, при необходимости прежде разложить знаменатели дробей на множители
3) привести к общему знаменателю
4) отбросить знаменатель с учетом ОДЗ
5) решить получившееся целое уравнение
6) сравнить с ОДЗ

Пример

$$\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$$

ОДЗ:

$x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 - 2x \neq 0$

$x^2 + 2x \neq 0$

$x \neq 0, -2, 2$

С учетом ОДЗ

$2x - (x + 2) = (4 - x)(x - 2)$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2$ – не удовлетворяет

$x_2 = 3$

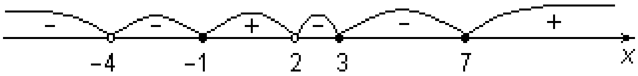
Ответ: 3

Рациональные неравенства

Пример

$$\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0$$

Это **рациональное** неравенство решим **методом интервалов**. Отметим на числовой прямой «жирными» точками нули числителя (–1; 3 и 7) и «прозрачными» – нули знаменателя (–4 и 2). Если бы заданное неравенство было строгим, нужно было бы все нули сделать «прозрачными». Эти точки разобьют числовую прямую на 6 интервалов:



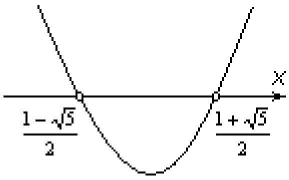
Выясним знак данной дроби на каждом из этих интервалов, используя пробные числа, принадлежащие интервалам.
Можно поступать иначе. Для этого в выражении в каждом из множителей переменная x должна иметь знак «+» (($x-2$), а не ($2-x$); ($x-7$), а не ($7-x$)). Этого всегда можно добиться, умножая неравенство на –1 и меняя одновременно его знак столько раз, сколько надо. Отметив нули выражения на числовой оси, справа налево расставим знаки по следующему правилу: сначала «+», меняем знак на нечетной степени и сохраняем его на четной.
Теперь остается выписать ответ – промежутки, на которых поставлен знак «+», так как знак данного неравенства $\geq$. Важно не забыть $x = 3$.
Ответ: $[-1;\ 2)\cup\{3\}\cup[7;\ +\infty)$

Квадратичные неравенства

Пример

$x^2 - x - 1 > 0$

Это **квадратное** неравенство можно решить методом интервалов, но проще – **графически**. Рассмотрим функцию, заданную уравнением $y = x^2 - x - 1$. Графиком ее является парабола.
Заметим, что для нас совершенно не важны точные характеристики параболы (где находится ось, пересечение с Oy и т. п.) Достаточно знать, что ее ветви направлены вверх (а > 0) и что она пересекает ось Ox в двух точках, являющихся корнями уравнения $x^2 - x - 1 = 0,\quad x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\quad x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Выполним схематический рисунок:



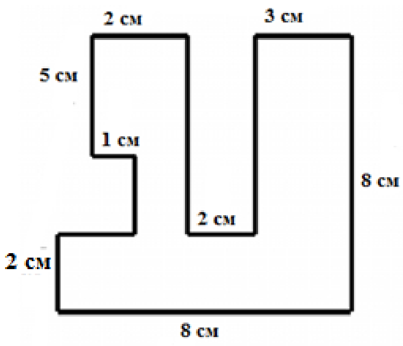
Из рисунка видно, что квадратичная функция принимает положительные значения вне отрезка, соединяющего ее корни.

Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$

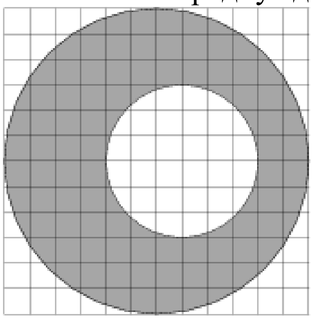
Задания для практических работ

1. Вокруг клумбы, радиус которой равен 2,5 м, проложена дорожка шириной 1 м. Какова длина внешней окружности дорожки?

2. Найти площадь фигуры



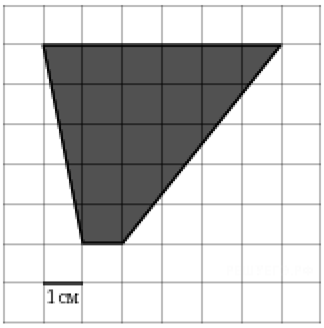
3. Рассчитать радиус детали (внешнего круга), если площадь отверстия равна 4.



4. Стекольщику необходимо изготовить стеклянные столешницы разного формата, но с одинаковыми размерами площадей. Для этого он просит друга помочь ему определить формулу для расчета радиуса R круглой стеклянной крышки с площадью, равной площади квадратной стеклянной крышки со стороной L.

5. Основание садового домика – прямоугольник 6х8 (м). Крыша наклонена под углом 45^o к основанию. Найдите площадь крыши.

6. Найдите площадь лесного массива (в м^2), изображенного на плане с квадратной сеткой 1х1 (см) в масштабе 1 см – 200 м.



7. Вычислите объём бетона, который требуется, чтобы залить пол в подвале, если его толщина 10 см, размеры помещения 15×19 м. Сколько нужно килограмм цемента, если на 1 м^3 уходит 4 мешка по 4 кг?

8. Освещение комнаты считается нормальным, если площадь проемов окон составляет не менее 0,2 площади пола. Удовлетворяет ли санитарным требованиям детская комната, если размеры окна 1,45×2 м, а комнаты 2,9×4,5 м?

9. Школьный сад имеет форму прямоугольника со сторонами 580 и 376 м. Сколько в нем яблонь, если на каждую яблоню приходится в среднем по 16 м^2? Какую выручку дал сад

после продажи яблок, если с 1 га собрано по 35 т яблок и каждая тонна продана в среднем по 450 р?

10. В день наладчик выполнил 35% всего задания, во второй день – 60% от того, что сделал в первый день, а в третий день – всю оставшуюся часть задания. Во второй день наладчик протянул на 184 м кабеля для интернета меньше, чем в третий день. Сколько кабеля протянул наладчик за три дня?

11. В цехе работают 20 рабочих, из них 8 электриков и 3 наладчика аппаратных и программных систем. Сколько процентов от всего числа рабочих составляют наладчики?

12. Цену на аппараты сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15 % и, наконец, после пересчета произвели снижения еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену оборудования?

13. На монтаж приборов уходило 225 м кабеля. После внедрения новой схемы монтажа на этот же пробор стали расходовать 198 м кабеля. На сколько процентов уменьшилась затрата кабеля?

14. Рассчитать прибыль по вкладу на 5 лет под 10% годовых, начальная сумма вложений 100000 рублей (с капитализацией).

15. Рассчитать прибыль по вкладу на 10 лет под 10% годовых с капитализацией. Начальная сумма вложений 50000 рублей, дополнительно каждый год начиная с первого счёт пополняется на 10000 рублей.

16. Рассчитать, сколько времени понадобится инвестору, чтобы увеличить капитал с 500000 до 1000000 рублей. Средняя доходность портфеля — 12% годовых, прибыль реинвестируется.

17. В банке открыт срочный депозит на сумму 50 тыс. руб. по 12% на 3 года. Рассчитать накопленную сумму если проценты:
а) простые
б) сложные

18. Торговая база закупила партию товара у изготовителя и поставила ее в магазин по оптовой цене, которая на 30% больше цены изготовителя. Магазин установил розничную цену на товар 20% выше оптовой. При распродаже магазин снизил эту цену на 10%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с ценой изготовителя, если на распродаже он приобрел товар за 140 руб. 40 коп.

19. Решить уравнения:
$5x – 3 = 12$
$– 4x + 1 = 13$
$6x – 14 = 1 + 3x$
$– 8x + 3 = – x + 24$
$5(x – 2) – 4 = 6x + 7$
$7/9\ x + 4 = 2/3\ x + 8$
$1/2\ x + 1/6\ x = x – 3$
$5{,}1 – 8x = 3{,}3 – 10x$
$0{,}7(2 – 3y) = – 7$

20. Решить уравнения:

1) $x^2 = \frac{9}{25}$

2) $x^2 = -0{,}36$

3) $16 - x^2 = 0$

4) $x^2 - 0{,}06 = 0{,}03$

5) $-0{,}2x^2 = -1{,}8$

6) $y^2 - 16 = -(12 + 3y^2)$

7) $48 - 3x^2 - (3 - x) = 2x^2 + x$

8) $(x + 5)^2 = 36$

9) $x^2 - 6x + 9 = 0$

21. Решить уравнения:

1) $2x^2 + 5x = 3x^2$

2) $5x^2 - 3x = 2x + x^2$

3) $(x - 3)(x + 3) - 2x = 2x^2 - 9$

22. Решить уравнения:

1) $x^2 + 4x - 12 = 0$

2) $x^2 - 4x - 21 = 0$

3) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

4) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

5) $5x^2 - 6x + 2 = 0$

6) $x(x + 2) = 6 + x - x^2$

7) $2x - x^2 - \frac{2-x}{3} = 0$

8) $\frac{x(1-x)}{5} - \frac{1-x}{4} + \frac{x(x-1)}{10} = 0$

23. Решить уравнения:

1) $\frac{2}{x^2-2x} - \frac{5}{x^2+2x} = \frac{1}{x}$

2) $\frac{x-7}{x-2} + \frac{x+4}{x+2} = 1$

3) $\frac{y-14}{y^3-8} = \frac{5}{y^2+2y+4} - \frac{1}{y-2}$

24. Решить неравенства:

$(4-x)^2 - (x+6)^2 \geq (x+5)^2 - (2-x)^2$

$\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} > \frac{3x-10}{4}$

$(x+2)^2(x-3)(x+6) < 0$

$(x-3)(x+4)(7-x) \leq 0$

$\frac{x-2}{x^2(x-7)} < 0$

$-x + 0{,}5(x+4) < 4$

$\frac{x(x+2)}{x-4} \geq 0$

$-13x - 13 \geq -3x$

$-9(7+x) - 3x \geq -9$

25. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5(x+1) - 9x - 3 > -6(x+2), \\ 3(3+2x) < 7x - 2(x-8). \end{cases} \qquad \begin{cases} 5(1-2x) > 12 - \dfrac{4x+3}{2}, \\ 1 + x < \dfrac{8-x}{3} - \dfrac{2-x}{4} \end{cases}$$

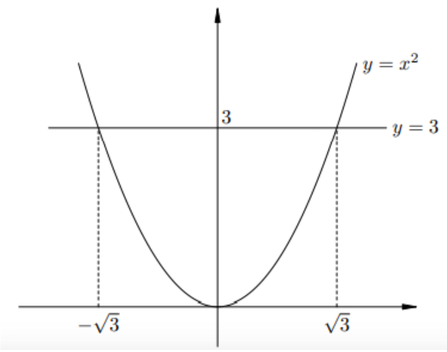
$$\begin{cases} x + 1{,}8 \le 0 \\ x + 0{,}5 \le -0{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -35 + 5x > 0 \\ 6 - 3x > -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -12 + 3x > 0 \\ 9 - 4x > -23 \end{cases}$$

Раздел 2. Корни и степени. Степенная функция

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Арифметический квадратный корень

Уравнение $x^2 = 4$ имеет два решения: $x = 2$ и $x = -2$. Это числа, квадрат которых равен 4. А как быть с уравнением $x^2 = 3$? Если мы нарисуем график функции $y = x^2$, то увидим, что и у этого уравнения имеются два решения, одно из которых положительно, а другое отрицательно.



Но теперь эти решения не являются целыми числами. Более того, они не являются рациональными. Для того, чтобы записать эти иррациональные решения, мы вводим специальный символ квадратного корня.

Итак, пусть $a \ge 0$. По определению, арифметический квадратный корень $\sqrt{a}$ — это неотрицательное число, квадрат которого равен a. Иными словами, это неотрицательный корень уравнения $x^2 = a$.

Например, $\sqrt{4} = 2$ (но не -2). А решения уравнения $x^2 = 3$ мы запишем следующим образом: $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$.

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не определено. В самом деле, не найдётся такого действительного числа, квадрат которого равен отрицательному числу a (или: уравнение $x^2 = a$ не имеет решений).

Кубический корень

Кубический корень из числа a — это число, куб которого равен a. Иными словами, это единственный корень уравнения $x^3 = a$. Обратите внимание, что кубический корень определён для всех a. Его можно извлечь из любого числа. Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$. Теперь становится ясно, как определить корень n-й степени для любого натурального n.

Корень n-й степени

Корень n-й степени из числа a — это число, n-я степень которого равна a. Иными словами, это корень уравнения $x^n = a$.
Пусть n чётно. Тогда при a < 0 корень n-й степени из a не определён. Если a ≥ 0, то неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называется арифметическим корнем n-й степени из a и обозначается $\sqrt[n]{a}$.
Пусть теперь n нечётно. Тогда уравнение $x^n = a$ имеет единственный корень при любом a. Он также обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Свойства корня n-ой степени:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} |a|, n - четно \\ a, n - нечетно \end{cases}$ Корень n-ой степени и возведение в эту же степень, эти операции являются взаимопоглощающими, поэтому при извлечении корня и возведении значения в степень, получаем искомое число a. Пример: вычислите значение выражения $(\sqrt[3]{-5{,}8})^3$ По свойству получаем значение выражения равному -5,8.
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0, b \geq 0$. Пример: найти значение выражения: $\sqrt[3]{25} * \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25*5} = \sqrt[3]{125} = 25$.
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0, b > 0$. Пример: найти значение выражения $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$.
4. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$. Пример: найти значение выражения: $(\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{64} = 4$.
5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geq 0$. Пример: найти значение выражения: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[3*2]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$.
6. $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$, $a \geq 0$. Пример: найти значение выражения: $\sqrt[9]{8^6} = \sqrt[3*3]{8^{3*2}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.
7. $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, $n - нечетно$. Пример: найти значения корня: $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

Степенью называется выражение вида a^c. Число a называется основанием степени, число c называется показателем степени.

Степень с натуральным показателем

Сначала определим понятие степени, показатель которой — натуральное число (т. е. целое и положительное).

Прежде всего, по определению

$$a^1 = a.$$

Далее, возвести число в квадрат — значит умножить его само на себя: $a^2 = a \cdot a$. Возвести число в куб — значит умножить его само на себя три раза: $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Возвести число в натуральную степень n — значит умножить его само на себя n раз:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

Степень с целым показателем

Сначала разберёмся с нулевым показателем, Если $a \neq 0$, то по определению

$$a^0 = 1.$$

Выражение 0^0 не определено!

Теперь определим степень с целым отрицательным показателем. Опять-таки, если $a \neq 0$, то для натурального n по определению имеем:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например:

$$5^{-1} = \frac{1}{5}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}.$$

Выражение 0^{-n} снова не определено.

Разобрались. Однако показатель степени может быть ещё и дробным! Здесь нам понадобится понятие корня n-й степени. Начнём с простейшего случая.

Степень с рациональным показателем

Сразу договоримся, что основание степени будет положительным: $a > 0$. Число n по-прежнему будет натуральным $(n \in N)$. Число m мы будем считать целым $(m \in Z)$.

Определение:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Например:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}.$$

Почему наложено ограничение $a > 0$? Понятно, что $a = 0$ не годится — нуль не возведёшь в отрицательную степень. Но чем плохи отрицательные основания степени?

Казалось бы, раз $\sqrt[3]{-8} = -2$, то можно записать: $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Но нас тут поджидает неприятность. Смотрите: $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Одно и то же число оказалось равно -2 и 2 одновременно.

Другой пример. С одной стороны, $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ не существует. Но с другой стороны, $(-4)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Чтобы не связываться с подобными парадоксами, рассматривают лишь положительное основание степени с дробным показателем.

Степень с рациональным показателем обладает следующими свойствами. (Числа a и b — действительные положительные, числа p и q — рациональные.)

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$
$$(a^p)^q = a^{pq}$$
$$a^p \cdot b^p = (ab)^p$$
$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

Все эти формулы можно доказать. Их знания достаточно для решения всех задач части B вариантов ЕГЭ по теме «Корни и степени».

Степени с дробным показателем очень полезны для преобразования выражений с корнями. Например:

$$\frac{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{7^{\frac{1}{9}} \cdot 7^{\frac{1}{18}}}{7^{\frac{1}{6}}} = 7^{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}-\frac{1}{6}} = 7^0 = 1.$$

Иррациональные уравнения

Мы называем уравнение иррациональным, если оно содержит переменную под знаком корня (квадратного, кубического и т. д.).
В большинстве ситуаций специально искать ОДЗ нет необходимости — нужно лишь следить за равносильностью осуществляемых преобразований. Однако в некоторых иррациональных уравнениях дело не доходит до каких-либо специфических приёмов; достаточно оказывается посмотреть на ОДЗ.

Пример

$\sqrt{5x-10}=2-x$

Решение
Найдём ОДЗ: $5x-10 \geq 0$, то есть $x \geq 2$. При таких значениях x правая часть нашего уравнения неположительна, а левая — неотрицательна. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части обращаются в нуль одновременно, то есть при $x = 2$.

Уравнения вида $\sqrt{A}=\sqrt{B}$

$$\sqrt{A}=\sqrt{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=B, \\ A \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{A}=\sqrt{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=B, \\ B \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример

$\sqrt{3x^2-3x-11}=\sqrt{2x^2-4x-5}$

Решение
Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2-3x-11=2x^2-4x-5, \\ 2x^2-4x-5 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+x-6=0, \\ 2x^2-4x-5 \geqslant 0 \end{cases}$$

Уравнение полученной системы имеет корни $x1 = 2$ и $x2 = -3$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что x1 не удовлетворяет неравенству системы, а x2 удовлетворяет ему. Следовательно, только x2 является корнем исходного уравнения.

Уравнения вида $A\sqrt{B}=0$

$$A\sqrt{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B=0, \\ A \text{ определено}, \end{cases} \\ \begin{cases} A=0, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Пример

$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$

Решение

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ \begin{cases} x^2-4=0, \\ x+1\geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности даёт x = −1. Решением системы служит x = 2.

Уравнения вида $\sqrt{A}=B$

$$\sqrt{A}=B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=B^2, \\ B\geqslant 0. \end{cases}$$

Пример

$$\sqrt{3x-x^2-2}=2x-3$$

Решение

$$\sqrt{3x-x^2-2}=2x-3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x-x^2-2=(2x-3)^2 \\ 2x-3\geqslant 0. \end{cases}$$

$$5x^2-15x+11=0$$

$$x_1=\frac{15+\sqrt{5}}{10}, \quad x_2=\frac{15-\sqrt{5}}{10}.$$

$$x\geqslant\frac{3}{2}.$$

$$x_1>\frac{15}{10}=\frac{3}{2}, \quad x_2<\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

Иррациональные неравенства

Неравенства вида $\sqrt{A}<\sqrt{B}$

$$\sqrt{A}<\sqrt{B} \quad \Leftrightarrow \quad 0\leqslant A<B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A<B, \\ A\geqslant 0. \end{cases}$$

Пример

$$\sqrt{2x+4}<\sqrt{x^2+8x-3}$$

Решение

$$\begin{cases} 2x+4<x^2+8x-3, \\ 2x+4\geqslant 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+6x-7>0, \\ x\geqslant -2. \end{cases}$$

x ϵ (1; +∞)

Неравенства вида $A\sqrt{B}\geqslant 0$

$$A\sqrt{B}\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B=0, \\ A \text{ определено}, \end{cases} \\ \begin{cases} A\geqslant 0, \\ B>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$$

Решение

$$\left[\begin{aligned} &x^2-x-2=0, \\ &\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x^2-x-2>0. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

x ϵ {−1} ∪ [2; +∞)

Неравенства вида $\sqrt{A} < B$

$$\sqrt{A} < B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B>0, \\ A<B^2, \\ A \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{A} \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A \leqslant B^2, \\ A \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример

$$\sqrt{3-x} < x-1$$

Решение

$$\sqrt{3-x} < x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1>0, \\ 3-x<(x-1)^2, \\ 3-x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим: x ∈ (2; 3]

Неравенства вида $\sqrt{A} > B$

$$\sqrt{A} > B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} B<0, \\ A \geqslant 0, \end{cases} \\ &\begin{cases} B \geqslant 0, \\ A>B^2. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$$\sqrt{A} \geqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} B \leqslant 0, \\ A \geqslant 0, \end{cases} \\ &\begin{cases} B>0, \\ A \geqslant B^2. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Пример

$$\sqrt{3-x} > x-1$$

Решение

$$\sqrt{3-x} > x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x-1<0, \\ 3-x \geqslant 0, \end{cases} \\ &\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 3-x>(x-1)^2 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<1, \\ x \leqslant 3, \end{cases} \\ &\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2-x-2<0. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

x ϵ (-∞; 2)

Задания для практических работ

1. Степени

$\frac{3^7}{81}$ $\frac{5^5}{25}$ $\frac{4^7}{64}$ $\frac{10^6}{2^5\cdot 5^4}$ $\frac{30^6}{3^4\cdot 10^5}$ $\frac{21^4}{3^2\cdot 7^3}$ $\frac{(2^2\cdot 2^4)^7}{(2\cdot 2^6)^6}$ $\frac{(5^3\cdot 5^4)^6}{(5\cdot 5^7)^5}$ $\frac{(7^2\cdot 7^4)^5}{(7\cdot 7^6)^4}$

$\frac{1}{2^{-11}}\cdot\frac{1}{2^7}$ $\frac{1}{4^{-10}}\cdot\frac{1}{4^9};$ $\frac{1}{2^{-7}}\cdot\frac{1}{2^9};$

$\frac{9^{-6}\cdot 9^{-7}}{9^{-15}}$ $\frac{11^{-3}\cdot 11^{-8}}{11^{-12}}$ $\frac{2^{-5}\cdot 2^{-8}}{2^{-17}}$

$\frac{(3^7)^{-2}}{3^{-16}}$ $\frac{(5^3)^{-4}}{5^{-11}}$ $\frac{(2^9)^{-3}}{2^{-29}}$

2. Корни

$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}};$ $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}};$ $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}};$

$\sqrt{(-5)^2};$ $\sqrt{(-17)^2};$ $\sqrt{(-8)^2};$

$\sqrt{56\cdot 40}\cdot\sqrt{35};$ $\sqrt{66\cdot 110\cdot 15};$ $\sqrt{48\cdot 80}\cdot\sqrt{15};$

$\sqrt{5^6};$ $\sqrt{9^3};$ $\sqrt{6^4};$

$\sqrt{10\cdot 7^2}\cdot\sqrt{10\cdot 2^6};$ $\sqrt{8\cdot 21^2}\cdot\sqrt{8\cdot 5^4};$ $\sqrt{11\cdot 3^2}\cdot\sqrt{11\cdot 4^4};$

$\frac{72}{(2\sqrt{3})^2};$ $\frac{90}{(3\sqrt{5})^2};$ $\frac{(2\sqrt{5})^2}{160};$

$(\sqrt{19}-\sqrt{2})(\sqrt{19}+\sqrt{2});$ $(\sqrt{18}-\sqrt{6})(\sqrt{6}+\sqrt{18});$ $(\sqrt{14}+\sqrt{15})(\sqrt{15}-\sqrt{14});$

$\frac{\sqrt{51}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{17}};$ $\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{14}}{\sqrt{6}};$ $\frac{\sqrt{65}\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{5}};$

$4\sqrt{17}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{34};$ $9\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{14};$ $10\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{42};$

$\frac{1}{\sqrt{10}-3}-\frac{1}{\sqrt{10}+3};$ $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}};$ $\frac{1}{5+\sqrt{23}}+\frac{1}{5-\sqrt{23}};$

$\sqrt{(4\sqrt{2}-7)^2}+4\sqrt{2};$ $\sqrt{(5\sqrt{3}-9)^2}+5\sqrt{3};$ $\sqrt{(6\sqrt{3}-11)^2}+6\sqrt{3};$

$(\sqrt{45}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5};$ $(\sqrt{27}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3};$ $(\sqrt{20}+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}.$

3. Найти значение выражения

$a^8 \cdot a^{17} : a^{20}$ при $a = 2$;

$\frac{a^9 \cdot a^{12}}{a^{18}}$ при $a = 3$;

$\frac{a^6 \cdot a^{19}}{a^{23}}$ при $a = 7$;

$\frac{(a^7)^2}{a^{12}}$ при $a = 5$;

$\frac{(a^4)^4}{a^{14}}$ при $a = 6$;

$\frac{(a^4)^5}{a^{18}}$ при $a = 3$;

$\frac{(a^9)^3 \cdot a^7}{a^{29}}$ при $a = 2$;

$\frac{(a^3)^8 \cdot a^7}{a^{28}}$ при $a = 7$;

$\frac{(a^5)^6 \cdot a^6}{a^{27}}$ при $a = 3$;

$\frac{\sqrt{25a^9} \cdot \sqrt{16b^8}}{\sqrt{a^5 b^8}}$ при $a = 4$ и $b = 7$;

$\frac{\sqrt{16a^9} \cdot \sqrt{4b^3}}{\sqrt{a^5 b^3}}$ при $a = 9$ и $b = 11$;

$\frac{\sqrt{4a^{11}} \cdot \sqrt{9b^4}}{\sqrt{a^7 b^4}}$ при $a = 7$ и $b = 9$;

$\sqrt{36x^4y^{10}}$ при $x = 3$ и $y = 4$;

$\sqrt{9x^4y^6}$ при $x = 5$ и $y = 3$;

$\sqrt{49x^2y^4}$ при $x = 5$ и $y = 3$;

$\sqrt{a^8 \cdot (-a)^4}$ при $a = 2$;

$\sqrt{a^2 \cdot (-a)^6}$ при $a = 3$;

$\sqrt{a^4 \cdot (-a)^2}$ при $a = 3$;

4. Решить иррациональное уравнение

$\sqrt{-3x+3} = x - 1$

$x = \sqrt{8x+9}$

$\sqrt{13-2x} = 5 - x$

$\sqrt{3x-5} = x - 11$

$\sqrt{5+8x-4x^2} = 4x - 1$

$x + \sqrt{2x^2-14x+13} = 5$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1$

$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x+7}$

5. Решить иррациональное неравенство

$\sqrt{x^2+2x-3} \geqslant -2$

$\sqrt{x^2-25} \cdot (x-3) < 0$

$(x^2+8x+15)\sqrt{x+4} \geqslant 0$

$\sqrt{x-1} < 3 - x$

$\sqrt{10x-1} + 1 \leqslant 5x$

$\sqrt{5-4x-x^2} \geqslant -2x - 1$

$\sqrt{441-x^2} \leqslant x + 21$

$\sqrt{5x-x^2+6} < \sqrt{6} - x$

Раздел 3. Показательная функция

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Опр.
Показательными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

1) Простейшие уравнения, т.е. такие, левую и правую части которых можно привести к одному основанию решаются так:

Пример

$5^x = 625 \Rightarrow 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4. \quad \textit{Ответ}: x = 4$

2) Уравнения вида $2^x + 2^{x-1} - 2^{x-3} = 4$ решаются вынесением за скобки степени с наименьшим показателем.

3) Уравнения, вида $7^{2x} - 48 \cdot 7^x = 49$ решаются с помощью подстановки $a^x = y$, сводятся к квадратным.

Пример

Решить уравнение: $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$

Решение:

$5^x = y$,

$5y^2 - 26y + 5 = 0$,

D = 169 – 25 = 144,

$y_1 = 5$ $y_2 = 1/5$

$5^x = 5$

$x - 1$,

$5^x = 1/5$

$x = -1$

Ответ: $x = 1$ и $x = -1$

4) При решении уравнения вида $a^x = b^x$ обе части уравнения необходимо разделить на b^x, т.к. $b^x \neq 0$

$$\frac{a^x}{b^x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Решение показательных неравенств сводится к решению простейших неравенств вида $a^x \succ a^b$

или $a^x \prec a^в$

Если $a > 1$ и $a^x \succ a^b$, то $x > b$

Если $0 < a < 1$ и $a^x \succ a^b$, то $x < b$

Пример

Решить неравенство: $\left(\sqrt{5}\right)^{4-x} \geq \frac{1}{125}$

Решение:

$5^{(4-x)/2} \geq 5^{-3}$, $a = 5$, сравним показатели $(4 - x)/2 \geq -3$, $4 - x \geq -6$, $-x \geq -10$, $x \leq 10$

Ответ: $x \leq 10$

Задания для практической работы

$5^x > 125$ $\quad 0{,}3^x \leq 0{,}0081$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64}$ $\quad 6^x = 1$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$ $\quad \pi^x = 1$

$2^{2x}<16$ $0{,}5^{3x}\geq 8$ $0{,}1^{4x}=10$ $3^{\frac{1}{2}x}=27$ $4^{0{,}3x}=64$ $\left(\sqrt{6}\right)^{7x}=1$

$8^{-1}\cdot 2^{3x}=8$ $\sqrt{3}\cdot 3^{3x}=\frac{1}{3}$ $27^{-1}\cdot 3^{3x}=\sqrt{3}$ $\sqrt{5}\cdot 5^{2x}=25^{x}\cdot\frac{1}{25}$

$\frac{100}{0{,}1^{2x+3}}=10^{x-1}$ $0{,}2\cdot 25^{2-x}=\frac{1}{5^{2x-2}}$ $32^{x^2-1}=2^{3x}\cdot 8^{4-x}$ $\frac{27^{x}}{9^{2x}}=\frac{3^{4+x}}{81}$

$4^{x}-3\cdot 4^{x-2}=52$ $9^{x}+3\cdot 3^{x}-18=0$

$4^{x}-6\cdot 2^{x}+8=0$ $5^{x}-7\cdot 5^{x-2}=90$

$\begin{cases}\left(\frac{1}{7}\right)^{4x-y}=49,\\ 5^{9x-y}=\sqrt[4]{5}.\end{cases}$ $2\cdot 3^{x+1}-3^{x}=15$ $49^{x}-8\cdot 7^{x}=-7$

$2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot\left(10^{x-1}\right)^{3}$ $9^{x+2}-26\cdot 3^{x+1}-3=0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x}=25$ $3^{x-1}-3^{x}+3^{x+1}=63$ $0{,}2^{x^2+4x-5}=1$

$4^{x}+2^{x}-20=0$ $\left(\sqrt{10}\right)^{x}=10^{x^2-x}$

$7^{x-2}>49$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}>1\frac{1}{3}$ $9^{x}-3^{x}-6>0$ $\left(\sqrt{5}\right)^{x-6}<\frac{1}{5}$ $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1}\geq 1$

Раздел 4. Логарифмы. Логарифмическая функция

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Опр.

Логарифмом числа b по основанию a, где a> 0, a ≠ 1, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Примеры

1. $\log_5 25=2,\ т.к.\ \ 5^2=25$
2. $\log_3 3=1,\ \ т.к.\ \ 3^1=3$

Определение логарифма можно записать так $a^{\log_a b}=b$. Его называют основным логарифмическим тождеством.

При преобразовании и вычислении значений логарифмических выражений применяют свойства логарифмов.

Свойства логарифмов:

1. $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$

2. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$

3. $\log_a b^r=r\cdot\log_a b$

4. $\log_{a^p} b=\frac{1}{p}\cdot\log_a b$

5. $\log_a a=1$
6. $\log_a 1=0$

Формула перехода к другому основанию: $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

Опр.
Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут lg b вместо $\log_{10} b$
$\log_{10} b=\lg b$
Опр.
Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e - иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут ln b вместо $\log_e b$, т.е. $\log_e b=\ln b$
Действие нахождения логарифма числа называется логарифмированием.
Действие, обратное логарифмированию называется потенцированием.
Примеры

1) $\log_6 18+\log_6 2=\log_6 36=2;$
2) $\log_{12} 48-\log_{12} 4=\log_{12} 12=1;$
3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}}=\frac{1}{7}\log_3 3=\frac{1}{7}.$

Вычислить $\log_5\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_5 12+\log_5 50.$

Применяя формулы (1) — (3), находим
$\log_5\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_5 12+\log_5 50=\log_5\frac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}}=$
$=\log_5 25=2.$ ◁

Опр.
Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, называются логарифмическими.
Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то и равны их логарифмы при данном основании и обратно, если логарифмы чисел равны, то равны и соответствующие им числа. Во всех случаях полученные решения необходимо проверить подстановкой их в данное уравнение и исключить посторонний корень. Часто используется формула перехода от одного основания к другому $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

Пример
Решить уравнение $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$
Решение

$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3 \qquad 3=\log_2 8$

$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=\log_2 8$

$(x+1)\cdot(x+3)=8$

$x^2+4x+3=8$

$x^2+4x-5=0$

$x_1=1, \quad x_2=-5$

Проверка

$x=1 \qquad \log_2(1+1)+\log_2(1+3)=\log_2 2+\log_2 4=1+2=3$ - левая часть

3=3 $\Rightarrow$ x = 1 – корень уравнения

$x=-5 \qquad \log_2(-5+1)+\log_2(-5+3)=\log_2(-4)+\log_2(-2)$ - левая часть не имеет смысла $\Rightarrow$

x = -5 не является корнем

Ответ: x = 1

При решении простейших логарифмических неравенств типа $\log_a x \succ \log_a b$ необходимо использовать следующее правило:

если a> 1, то знак неравенства не меняется, т.е. x> b

если 0 <a <1, то знак неравенства меняется на противоположный, т.е. x <b.

При решении логарифмических неравенств необходимо проверить, входит ли полученное решение в область определения неравенства.

Пример

Решить неравенство $\lg(x+1)\le 2$

Решение

$\lg(x+1)\le 2 \qquad 2=\lg 100$

$\lg(x+1)\le \lg 100$

$a=10, \quad a\succ 1 \quad \Rightarrow \quad x+1\le 100$

$x\le 99$

Область определения: x + 1> 0

x > -1

Общее решение: $\begin{cases} x\le 99, \\ x\succ -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad -1\prec x\le 99$

Ответ: $-1\prec x\le 99$

Задания для практической работы

Найдите:

$log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{32} \qquad log_{49}7 \qquad log_{0,2}25 \qquad lg\,0{,}001 \qquad log_5\frac{1}{25} \qquad log_{64}8 \qquad lg10000 \qquad log_8 1$

$log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27} \qquad lg\,0{,}01 \qquad log_3\frac{1}{81} \qquad log_4\sqrt{2} \qquad log_5\frac{1}{5} \qquad log_2 16\sqrt{2} \qquad log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3} \qquad lg\,0{,}1$

С помощью основного логарифмического тождества вычислите:

$3^{2+log_3 2} \qquad 2^{1+log_2 5} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{2+log_3 2} \qquad \sqrt{2}^{2+log_4 5} \qquad 3^{2+log_3 5} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{1+log_2 3} \qquad 5^{-1+log_5 2} \qquad 0{,}2^{1+log_{0,2}5}$

Прологарифмируйте по основанию 2 выражение $16b^7 \cdot \sqrt[5]{c}$ $(c>0,\ b>0)$

Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\dfrac{c^4}{\sqrt[3]{100}b^4}$ $(c>0,\ b>0)$

Прологарифмируйте по основанию 3 выражение $\dfrac{27\sqrt{b}}{c^4}$ $(c>0,\ b>0)$

Прологарифмируйте по основанию 0,7 выражение $\dfrac{0{,}49b^3}{c^5 \cdot \sqrt{c}}$ $(c>0,\ b>0)$

Прологарифмируйте по основанию 5 выражение $25b^3 \cdot \sqrt[4]{c^7}$ $(c>0,\ b>0)$

Прологарифмируйте по основанию 0,2 выражение $\dfrac{0{,}0016b^4}{c \cdot \sqrt[7]{c^2}}$ $(c>0,\ b>0)$

Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\dfrac{0{,}001\sqrt[3]{c^2}}{b^3}$ $(c>0,\ b>0)$

Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\sqrt{10}b^5c^{-\frac{1}{3}}$ $(c>0,\ b>0)$

Найдите х, если $log_3 x = 2log_3 7 + \dfrac{2}{3}log_3 27 - \dfrac{3}{2}log_3 16$

Найдите х, если $log_2 x = 2log_2 5 - \dfrac{1}{3}log_2 8 + log_2 0{,}2$

Найдите х, если $log_5 x = log_5 1{,}5 + \dfrac{1}{3}log_5 8$

Найдите х, если $lg\, x = 1 + 2lg\, 3 - \dfrac{2}{3}lg 125$

Найдите х, если $log_4 x = 2log_4 10 + \dfrac{3}{4}log_4 81 - \dfrac{2}{3}log_4 125$

Найдите х, если $log_{\frac{1}{3}} x = \dfrac{1}{2}log_{\frac{1}{3}} 16 - log_{\frac{1}{3}} 8 + log_{\frac{1}{3}} 28$

Найдите х, если $log_4 x = \dfrac{1}{2}log_4 7 + log_4 32 - \dfrac{1}{2}log_4 28$

Найдите x, если $log_3 x = log_3 12 - \dfrac{1}{2}log_3 32 + \dfrac{1}{2}log_3 6$

Решите уравнения:

$log_2(x-15)=4$

$lg(2x)+lg(x+3)=lg(12x-4)$

$lg^2 x + 2lg\, x = 8$

$lg(x^2-2x-4)=\lg 11$

$1+log_2(3x+1)=log_2(x^2-5)$

$4lg^2 x - 2 = lg\, x^2$

$log_4(5x+6)=0$

$log_2(4-x)+log_2(1-2x)=2log_2 3$

$log_5^2 x - log_5 x^2 = 3$

$log_2(4-x)+log_2(1-2x)=2log_2 3$

$log_3(3x+2)=log_3(x+4)$

$lg(x-2)+lg(x-3)=1-lg\,5$

$log_3^2 x = 4 - 3log_3 x$

Решите неравенство:

$log_{16}(0{,}6+2x) \geq -0{,}25$

$log_{0,8}(3-5x) \geq 0$

$log_4(3-4x) \geq -1$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-5) > 1$

$\log_{\frac{1}{6}}(10-x) + \log_{\frac{1}{6}}(x-3) \geq -1$

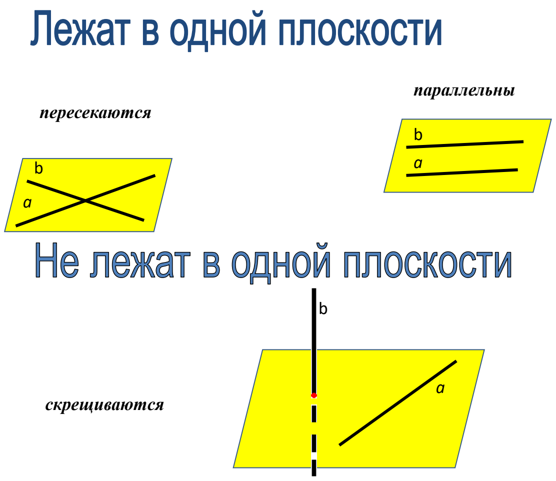
$\log_8(x^2-4x+3) < 1$

Выполнить презентации/рефераты (по группам) на тему «Применение логарифма. Логарифмическая спираль в природе, её математические свойства».

Раздел 5. Прямые и плоскости в пространстве

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Прямые



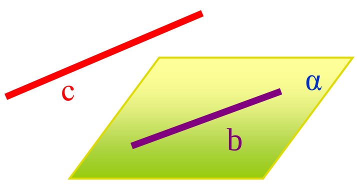
Определение

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Определение

Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

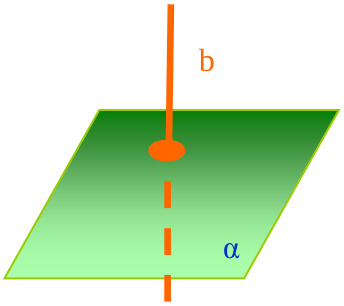
Прямая и плоскость в пространстве



$b \in \alpha, \quad c \parallel \alpha$

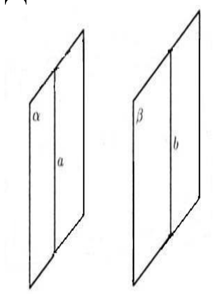
Определение

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

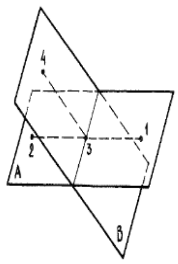


b ∩ α

Две плоскости

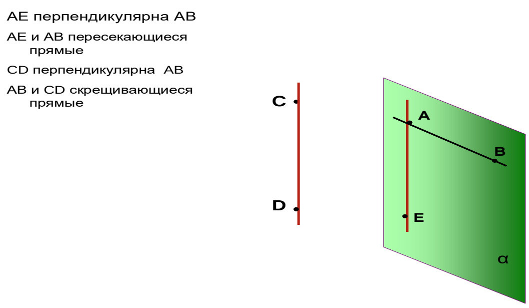


Параллельные плоскости



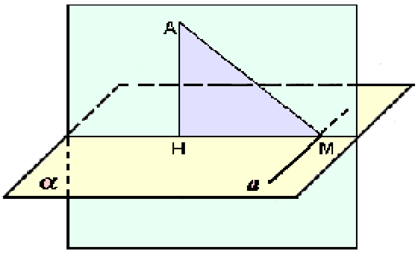
Пересекающиеся плоскости

<u>Опр.</u> Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.
При решении задач используется определение перпендикулярных прямых в пространстве.
<u>Опр.</u>
Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^{o}.
Обратить внимание на то, что в пространстве перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и скрещивающимися.



Признак перпендикулярности прямой и плоскости:
Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.
Теорема о 3-х перпендикулярах:
Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.
Обратная теорема:
Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

При решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью необходимо помнить, что углом между прямой и плоскостью является наименьший угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.



AH - перпендикуляр
AM - наклонная
HM – проекция наклонной на данную плоскость
a - прямая, проходящая через основание наклонной

Задания для практической работы

1. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найти длину AB, если AC=6 см, BD=7см, CD=6 см.

2. Через вершину A прямоугольника ABCD проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояние от точки K до других вершин прямоугольника равны 6 см, 7 см, 9 см. Найти AK.

3. Телефонная проволока длиной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м, от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте 20 м. Найти расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

4. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 см от нее. Проекция катетов на эту плоскость равна 3 см и 5 см. Найти гипотенузу.

5. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 см от противолежащей стороны. Проекции диагоналей на эту плоскость равны 8 см и 2 см. Найти проекции этих сторон.

6. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Доказать, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

7. Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 см и боковой стороной 5см. Из центра вписанного круга восставлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2см. Найти расстояние от конца перпендикуляра до сторон треугольника.

8. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC. Точка P – середина стороны AD, точка K – середина DC.
а) Каково взаимное расположение прямых PK и AB?
б) Чему равен угол между прямыми PK и AB, если угол ABC равен 40º, а угол BCA = 80º. Ответ обобщите.

9. Прямые a и b лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти прямые быть
а) параллельными
б) скрещивающимися?
Сделать рисунок для каждого возможного случая.

10. Точка B не лежит в плоскости Δ ADC. Точки M, N и P – середины отрезков BA, BC, BD соответственно. а) Доказать, что плоскости (MNP) и (ADC) параллельны;
б) Найдите площадь треугольника MNP, если $S_{\Delta ADC} = 48$ см^2.

11. Две прямые пересекаются в точке K. Доказать, что все прямые, не проходящие через точку K и пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости.

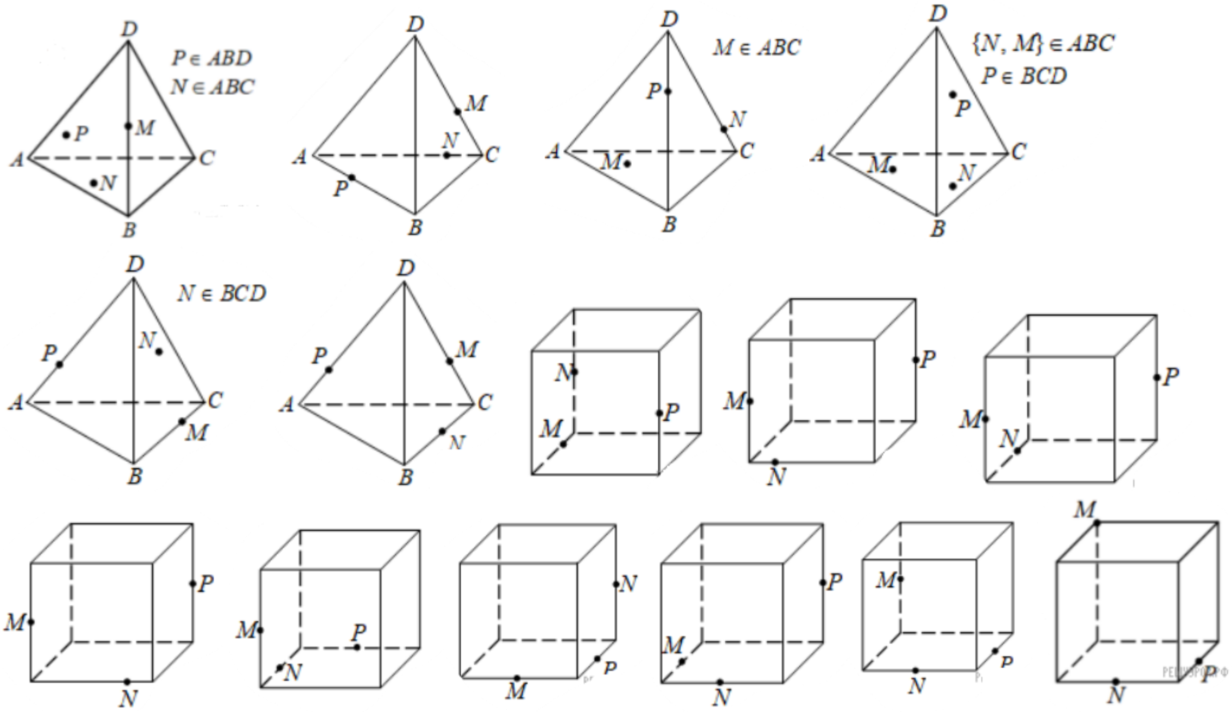
12. Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проведена плоскость, а через точки B и C, параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найти длину отрезка CC_1, если AC:CB=3:2, BB_1=20 см.

13. Точка E не лежит в плоскости треугольника ABC. Точки M, H, P – середины отрезков EA, EB, EC соответственно. Доказать, что плоскости MHP и ABC параллельны. Найти площадь треугольника MHP, если площадь треугольника ABC равна 128 см^2.

14. Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: 5, 4, 12.

15. Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CM, перпендикулярная к его плоскости. Найти расстояние от точки M до прямой AB, если AC=4 см, CM=$2\sqrt{7}$ см.

16. Построить сечения многогранников



Раздел 6. Векторы и координаты

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Определение. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Если точка $M(x, y, z)$ **делит отрезок AB в соотношении λ/μ**, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$x = (x_1 + x_2)/2$; $y = (y_1 + y_2)/2$; $z = (z_1 + z_2)/2$.

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$\vec{a}\,.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\,.\vec{a} = |\vec{a}|^2$;

2) $\vec{a}\,.\vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.

3) $\vec{a}\,.\vec{b} = \vec{b}\,.\vec{a}$;

4) $\vec{a}\,.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,.\vec{b} + \vec{a}\,.\vec{c}$;

5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\,.\vec{b})$;

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$\vec{a}\,.\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$;

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$\vec{a}.\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, 4, -2)$

$\vec{a}.\vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};$ $|\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

$$15\vec{a}.\vec{a} - 18\vec{a}.\vec{b} - 10\vec{a}.\vec{b} + 12\vec{b}.\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} +$$
$$+ 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример 1

Вычислить работу, совершаемую силой F = (1; 2; 3), при прямолинейном перемещении материальной точки из положения B (1; 0; 0) в положение C (10; 1;2).

Решение:

Мы знаем, что физический смысл скалярного произведения векторов, есть ни что иное, как работа A, совершенная силой F> по перемещению из одной точки пространства в другую (из B в C)

A = | F> | • | BC> | cos (F>; BC>), т. е. A = F> • BC> - скалярному произведению

В нашем случае F>= (1; 2; 3), BC> = (9; 1; 2), поэтому по формуле скалярного произведения получаем:

A = 1•9 + 2•1 + 3•2 = 17 (ед. работы).

Таким образом, чтобы найти работу постоянной силы F> при перемещении материальной точки вдоль отрезка BC>, достаточно вычислить скалярное произведение вектора силы F> и вектора перемещения BC>.

Пример 2

Даны три силы F_1 (2; 2;3), F_2 (0;3;1), F_3 (4;5;3), приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения движется прямолинейно из положения A (0;1;1) в положение B (4;5;3).

Решение:

Работа силы F на перемещение l находится по формуле A=F*l. Найдем равнодействующую сил: $F=F_1+F_2+F_3$=2+0-4; -2+3+5; 3-1+3=-2; 6; 5.

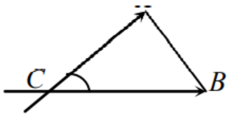
Определим вектор перемещения: l=AB=4;5;3-0;1;-1= 4;4;4.

В итоге имеем: A=F*l=(-2;6;5)*(4;4;4)=-2*4+6*4+5*4=36.

Ответ: A=36

Пример 3
Даны вершины треугольника A=(2;5;3), B=(-3;0;1), C=(-4;3;-1). Определить внутренний угол треугольника при вершине C.
Решение:

Решение. Искомый угол находится между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, выходящими из вершины C (из рис. 7 видно, что если неверно выбрать одно из направлений векторов, то можно ошибочно найти смежный угол с внутренним). Найдем эти векторы:



Р и с. 7

$$\overrightarrow{CA} = 2;5;3 - -4;3;-1 = 6;2;4 \;;$$

$$\overrightarrow{CB} = -3;0;-1 - -4;3;-1 = 1;-3;0 \;.$$

Угол между векторами находится с помощью формулы свойство 7 скалярного произведения: $\cos C = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\,\left|\overrightarrow{CB}\right|}$. Имеем

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 6;2;4 \quad 1;-3;0 = 6-6+0=0$, откуда

$\cos C = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\,\left|\overrightarrow{CB}\right|} = 0 \;\Rightarrow \angle C = 90^0$ – треугольник прямоугольный.

Ответ: внутренний угол треугольника при вершине C равен 90°.

Пример 4
Найти значения α и β, при котором векторы a=-4i+2j+αk и b=βi+j+2k коллинеарны.
Решение:

Решение. Из условия коллинераности $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$ получаем $\dfrac{-4}{\beta} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{\alpha}{2}$. Составляя уравнения $\dfrac{-4}{\beta} = \dfrac{2}{1}$ и $\dfrac{2}{1} = \dfrac{\alpha}{2}$, найдем $\beta = -2$ и $\alpha = 4$.

Ответ: $\beta = -2$, $\alpha = 4$.

Задания для практической работы

1.	$\bar{a}$ (7;3;0),	$\bar{b}$ (4;1;1),	$\bar{c}$ (–7;1;12),	$\bar{d}$ (–11;8;5).
2.	$\bar{a}$ (2;0;3),	$\bar{b}$ (–9;2;10),	$\bar{c}$ (–4;2;10),	$\bar{d}$ (–1;-2;–10).
3.	$\bar{a}$ (1;2;2),	$\bar{b}$ (5;–2;–7),	$\bar{c}$ (0;5;–1),	$\bar{d}$ (–2;6;–6).
4.	$\bar{a}$ (–2;3;1),	$\bar{b}$ (2;6;7),	$\bar{c}$ (4;–1;0),	$\bar{d}$ (6;–3;–5).
5.	$\bar{a}$ (1;3;1),	$\bar{b}$ (1;–8;2),	$\bar{c}$ (0;–5;3),	$\bar{d}$ (3;–8;2).
6.	$\bar{a}$ (2;5;–1),	$\bar{b}$ (–1;2;–6),	$\bar{c}$ (–2;1;1),	$\bar{d}$ (–11;–5;–1).
7.	$\bar{a}$ (–1;4;3),	$\bar{b}$ (5;0;1),	$\bar{c}$ (–1;4;4),	$\bar{d}$ (–7;8;7).
8.	$\bar{a}$ (3;3;2),	$\bar{b}$ (1;2;3),	$\bar{c}$ (1;–1;4),	$\bar{d}$ (4;–1;7).
9.	$\bar{a}$ (–2;–1;1),	$\bar{b}$ (2;3;0),	$\bar{c}$ (–4;2;3),	$\bar{d}$ (–10;–9;3).
10.	$\bar{a}$ (1;5;1),	$\bar{b}$ (–2;5;4),	$\bar{c}$ (3;–1;2),	$\bar{d}$ (4;19;9).

а) Найти длины этих векторов.

б) Найти координаты вектора: $3\overline{a} + 2\overline{b}$; $2\overline{c} - 5\overline{d}$;

с) Точка M(x,y,z) середина вектора $\overline{d}$, выходящего из начала координат.

Найди координаты точки M.

д) Точка C(x,y,z) разделяет вектор $\overline{d} = \overrightarrow{OD}$ в отношении 1:5, считая от точки O(0;0;0). Найди координаты точки C.

е) Найти косинусы углов, которые образует вектор $\overline{d}$ с базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

ВАРИАНТЫ 1-10. Даны вершины пирамиды $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$. Найти:

1) координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$; $\overrightarrow{A_1A_4}$;
2) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$; $\overrightarrow{A_1A_4}$;
3) длину ребра A_1A_2; A_1A_3 .
4) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
5) найти $(5\overrightarrow{A_1A_2} + 3\,\overrightarrow{A_1A_4})(2\,\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1A_4})$
6) уравнение грани $A_1A_2\,A_3$.
7) площадь грани $A_1A_2\,A_3$.

1. A_1 (3,2,1), A_2 (1,3,2), A_3(2,0, –1), A_4(4,–2,3).

2. A_1 (2,–1,8), A_2 (3,4,4), A_3(2,–1,2), A_4(6,1,6).

3. A_1 (8,5,0), A_2 (–3,7,–5), A_3(–4,1,3), A_4(–2,1,–4).

4. A_1 (0,1,–1), A_2 (3,–4,4), A_3(6,–1,3), A_4(5,2,–1).

5. A_1 (3,2,–3), A_2 (3,–1,1), A_3(0,2,–2), A_4(4,–2,3).

6. A_1 (0,6,–1), A_2 (3,–8,2), A_3(4,–1,0), A_4(2,1,–4).

7. A_1 (2,–3,2), A_2 (0,5,4), A_3(5,6,1), A_4(–2,1,3).

8. A_1 (6,–2,0), A_2 (6,2,–1), A_3(2,–1,4), A_4(–2,7,4).

9. A_1 (1,4,–2), A_2 (–3,0,3), A_3(8,0,1), A_4(1,–4,0).

10. A_1 (1,8,2), A_2 (4,–1,2), A_3(–1,5,3), A_4(3,3,–3).

1. Вычислить работу, совершаемую силой F (3; 2; 1), если груз был доставлен из пункта B (5;2;0) в пункт C (7; 2; -4).
2. Проверить коллинеарность векторов AB и CD , если A (2;-5;1), B (-3;0;-1), C (4;2;-1), D (-6; 12; -5).
3. Даны вершины треугольника A (2;5;3), B (-2;5;-1), C (-4;3;-1). Определить длину медианы AK.
4. Вычислить работу силы F (-2;3;1), когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора I (4;7;9).
5. Даны вершины четырехугольника A (1; –2; 2), B (1; 4; 0), C (–4; 1;1), D (–5; –5;3). Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.
6. Определить при каком β векторы a=2i-j+3k и b=βi+4j-6k взаимно перпендикулярны.

Вариант 1

1. A (-1;3;2); B (0;5;7). Найти координаты $\vec{AB}$.

2. A (0;2; -5); Б (1;1;3). Найти длину вектора $\vec{BA}$.

3. $\vec{a}$ = {0;0,1}; $\vec{b}$ = {5; -1;4}; $\vec{c}$ = {2; -1;1}. Найти координаты вектора $2\vec{a} + 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

4. $\vec{c}$ = {11; -8;2}; $\vec{d}$ = {3; -2; £}. При каком значении £ $\vec{c} \perp \vec{d}$
5. Вычислить угол между прямыми AB и CD: A (3; -2;4), B (4; -1;2), C (4; -1;2), D (7; -1;3).

6. Вычислить векторное произведение: $\vec{a}$ = {-1; -8; -3}, $\vec{b}$ = {3;1; -7}.
7. Даны 3 последовательные вершины параллелограмма: A (-3; -2;0), B (3; -3;1), C (5;0;2). Найти вершину D.

Вариант 2

1. A (0;7;-2), C (5;-1;0). Найти координаты вектора $\vec{CA}$.

2. A (0;0;-8), C (4;-3;-10). Найти длину вектора $\vec{CA}$.

3. $\vec{a}$ = {2;-1;0}; $\vec{b}$ ={3;0;4}; $\vec{c}$ ={-8;6;2}. Найти координаты вектора $3\vec{a} + 4\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

4. $\vec{d}$ = {3;1;-7}, $\vec{e}$ ={5;£;-2}. При каком значении £ $\vec{e} \perp \vec{d}$.
5. Вычислить угол между прямыми AB и CD: A (5;-8;-1), B (6;-8;-2), C (7;-5;-11), D (7;-7;-9).

6. Вычислить векторное произведение: $\vec{a}$ = {12;-1;-3}, $\vec{b}$ ={-1;1;5}.

7. При каких x и y векторы $\vec{a}$ ={x;2x;1} и $\vec{b}$ ={y;x^2;-4} коллинеарны?

Раздел 7. Основы тригонометрии

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$$
$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$$
$$\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Формулы сложения и вычитания

Функция	Аргумент	
	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
sin	$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$	$\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$
cos	$\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$	$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$
tg	$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$
ctg	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$
sec	$\frac{1}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$	$\frac{1}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$
cosec	$\frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$	$\frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$\sin\alpha + \sin\beta$	$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha - \sin\beta$	$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta$	$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha - \cos\beta$	$-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \sin\alpha$	$\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$
$\cos\alpha - \sin\alpha$	$\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$
$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$	$\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$	$\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$
$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$	$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$

При доказательстве тригонометрических тождеств обычно используют следующие способы:

1. Выражение, стоящее в одной части равенства, с помощью тождественных преобразований приводят к выражению, стоящему в другой части равенства.
2. Выражения, стоящие в левой и правой части тождества с помощью тождественных преобразований приводят к одному и тому же виду.
3. Доказывают, что разность между левой и правой частью тождества равны нулю.

При доказательстве тригонометрических тождеств используют основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, формулы приведения, формулы сложения, формулы для двойного и половинного аргумента, формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, а также числовые значения тригонометрических функций для некоторых углов.

Пример 1. Доказать тождество: $\cos^2\alpha = (1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)$

Доказательство: $(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha) = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ - правая часть

$$\cos^2\alpha = \cos^2\alpha$$

Пример 2. Доказать тождество: $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \dfrac{1+\sin\varepsilon}{\cos\alpha}$

Доказательство: $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{1+\sin\varepsilon}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha - (1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha\ )} = \dfrac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha\ )} = 0$

Опр. Уравнение называется тригонометрическим, если неизвестная величина входит в него как аргумент тригонометрической функции.

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	a	Формулы решений	Частные случаи
$\sin x = a$	$\|a\| > 1$	Нет решений	—
	$\|a\| \leqslant 1$	$x = (-1)^k \times \arcsin a + \pi k,\ k \in z$	$\sin x = 0;\ x = \pi k,\ k \in z$
			$\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in z$
			$\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in z$
$\cos x = a$	$\|a\| > 1$	Нет решений	—
	$\|a\| \leqslant 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in z$	$\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in z$
			$\cos x = 1;\ x = 2\pi n,\ n \in z$
			$\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in z$
$\operatorname{tg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in z$	—
$\operatorname{ctg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in z$	—

Уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\ x = a$ называются простейшими. Для них выведены формулы корней:

$\sin x = a \qquad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$

$\cos x = a \qquad x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$

$tg\ x = a \qquad x = arctg\ a + \pi n, n \in Z$

$ctg\ x = a \qquad x = arctg\ \frac{1}{a} + \pi n, n \in Z$

К этим уравнениям сводятся все другие. Для большинства таких уравнений требуется применение различных формул и преобразование тригонометрических выражений.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным $8\sin^2 x - 6\sin x - 3 = 0$. Вводят новую переменную $\sin x = t$

Задача 2 Решить уравнение $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

▶ Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем

$$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0, \text{ или}$$
$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0.$$

Обозначая $\sin x = y$, получаем $2y^2 + 5y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\sin x = -3$ — уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$;

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

2. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$ $a \neq 0$, $b \neq 0$ называются однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Оно решается делением обеих частей на $\cos x \neq 0$. В результате получается уравнение

$a \cdot tgx + b = 0$. Этим же способом решается уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$. Обе части уравнения делятся на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$.

Задача 6 Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

▶ Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$, $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{2}$, $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 7 Решить уравнение $2\sin x + \cos x = 2$.

▶ Используя формулы $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2 \cdot 1 = 2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$, получаем

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2},$$

$$3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Поделив это уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$, получим равносильное уравнение $3\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 4\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозначая $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = y$, получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

3. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

Пример

$\sin 2x - \sin x = 0$

$2\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$ Общий множитель $\sin x$ выносится за скобки.

$\sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ *или* $2\cos x - 1 = 0$

$x = \pi n, n \in Z$ $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \pi n, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$

Задача 11 Решить уравнение $\sin 7x + \sin 3x = 3\cos 2x$.

▶ Применяя формулу для суммы синусов, запишем уравнение в виде

$$2\sin 5x \cos 2x = 3\cos 2x,$$
$$2\sin 5x \cos 2x - 3\cos 2x = 0,$$

откуда $\cos 2x\left(\sin 5x - \frac{3}{2}\right) = 0$.

Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а уравнение $\sin 5x = \frac{3}{2}$ не имеет корней.

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Если уравнение имеет две серии корней, полученных при решении тригонометрических уравнений, имеющую общую часть, в ответе можно оставлять обе серии. Например, x = πn; x = $\frac{\pi n}{3}, n \in Z$

ПРИМЕР 1. Решите уравнение: $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

РЕШЕНИЕ. Применив основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим:

$$2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x + 1 = 0$$
$$2 - 2\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0$$
$$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$$

Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Обозначим $\cos x = y$, тогда $2y^2 + 5y - 3 = 0$. Полученное уравнение имеет решения

$$y_1 = -3, \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

Составим два простейших уравнения:

$$\cos x = -3 \qquad \text{и} \qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

Первое уравнение решений не имеет, так как $-1 \le \cos x \le 1$. Второе уравнение имеет решение:

$$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$$
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

ПРИМЕР 2. Решите уравнение: $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2$

РЕШЕНИЕ.

Так как по формуле приведения $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos^2 x$, а $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ по формуле двойного угла, то

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x - 2 = 0$$

При помощи основного тригонометрического тождества заменим 2 на $2\left(sin^2 x+cos^2 x\right)$ и получим:

$$3sin^2 x-4sin x cos x+5cos^2 x-2\left(sin^2 x+cos^2 x\right)=0$$

откуда

$$sin^2 x-4sin x cos x+3cos^2 x=0$$

Это уравнение является однородным относительно $sin x$ и $cos x$. Разделив обе части полученного уравнения на $cos^2 x$, получим

$$tg^2 x-4tgx+3=0$$

Это уравнение является квадратным относительно tgx. Обозначим $tgx=y$, тогда $y^2-4y+3=0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $y_1=1,\ y_2=3$. Из уравнения $tgx=1$ получаем

$$x_1=arctg1+\pi n$$

$$x_1=\frac{\pi}{4}+\pi n$$

Из уравнения $tgx=3$ получаем

$$x_2=arctg3+\pi k$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z,\ arctg3+\pi k,\ k\in Z$

ПРИМЕР 3. Решите уравнение: $cos2x=cos6x$

РЕШЕНИЕ.

Запишем данное уравнение иначе:

$$cos2x-cos6x=0.$$

По формуле разности косинусов $cos x-cos y=-2sin\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}$ получаем:

$$2sin4x\,sin2x=0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому если $sin4x=0$, то $4x=\pi n,\ x_1=\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$; если $sin2x=0$, то $2x=\pi k,\ x_2=\frac{\pi k}{2}.\ k\in Z$.

Можно заметить, что вторая серия решений содержится в первой и иначе записать ответ.

Ответ: $x=\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$.

ПРИМЕР 4. Решите уравнение: $sin3x=2cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

РЕШЕНИЕ.

В правой части применим формулу приведения

$$sin3x=2sin x$$

$$sin3x-sin x-sin x=0$$

$$\left(sin3x-sin x\right)-sin x=0$$

Применим формулу разности синусов $sin x-sin y=2sin\frac{x-y}{2}cos\frac{x+y}{2}$, тогда

$$2sin x\,cos2x-sin x=0$$

Вынесем за скобки общий множитель:

$$sin\,x(2\,cos\,2x-1)=0$$

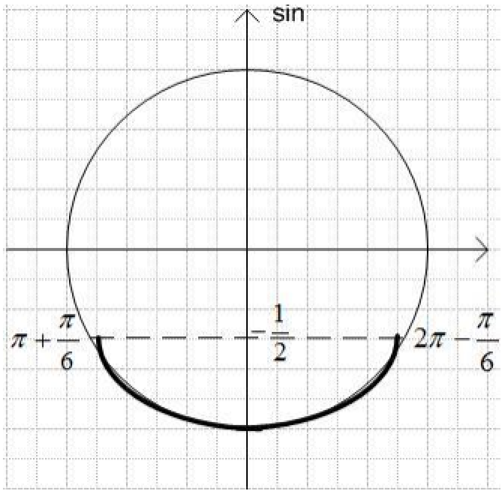
Если $sin\,x=0$, то $x_1=\pi n$; если $2cos\,2x-1=0$, то $2cos\,2x=1$, $cos\,2x=\frac{1}{2}$, значит,

$2x=\pm arccos\frac{1}{2}+2\pi k$, $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$.

Ответ: $\pi n,\ n\in Z;\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

Простейшие тригонометрические неравенства

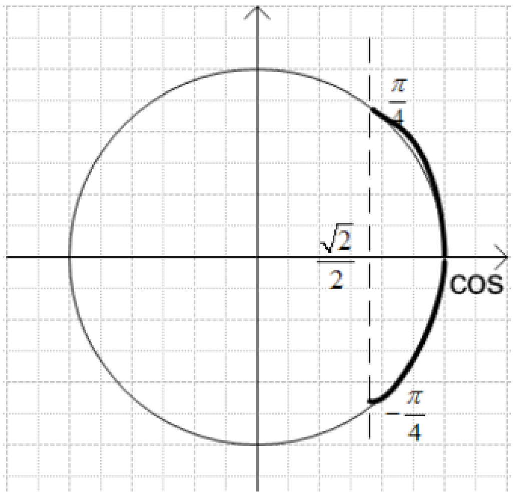
1. $\sin x<-\frac{1}{2}$



По графику видно, что решение лежит между углами $\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$. Чтобы получить все решения, к каждому из углов надо добавить 2πk.

Ответ: $\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{11\pi}{6}+2\pi k\right);k\in Z$

2. $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$



Ответ: $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right];k\in Z$

Задания для практической работы

1. Выразите в радианной мере величины углов:

$10^0,\ 135^0,\ -60^0;$

$18^0,\ 150^0,\ -90^0;$

$30^0,\ 144^0,\ -130^0$

$54^0,\ 135^0,\ -36^0;$

$15^0,\ 120^0,\ -180^0;$

2. Выразите в градусной мере величины углов:

$\frac{7\pi}{6},\ -\frac{\pi}{5},\ 0{,}3\pi;$

$\frac{5\pi}{18},\ -\frac{7\pi}{9},\ 0{,}2\pi;$

$\frac{5\pi}{9},\ -\frac{11\pi}{18},\ 1{,}4\pi;$

$\frac{5\pi}{36},\ -\frac{4\pi}{5},\ 1{,}5\pi;$

$\frac{7\pi}{9},\ -\frac{2\pi}{3},\ 0{,}8\pi;$

3. Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:

$\sin\alpha = 0{,}8,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$

$\cos\alpha = \frac{4}{5},\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$

$\sin\alpha = -\frac{4}{5},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

$\cos\alpha = -0{,}8,\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

$\cos\alpha = -\frac{4}{5},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

4. Вычислите:

а) $sin240^0;$ б) $tg300^0;$ в) $sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$

г) $sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)tg\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right);$ д) $tg\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

5. Упростите/вычислите:

а) $cos33^0 cos63^0 - sin33^0 sin63^0$ б) $sin\frac{5\pi}{7}cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{5\pi}{7}sin\frac{2\pi}{7}$

в) $sin27^0 20' cos32^0 40' + cos27^0 20' sin32^0 40'$ г) $\frac{tg73^0 - tg13^0}{1 + tg73^0 tg13^0}$ д) $\frac{sin2\alpha}{sin\alpha}$

е) $(sin\alpha - cos\alpha)^2$ ж) $2sin75^0 cos75^0$ з) $sin15^0 cos15^0$ и) $\frac{1 - ctg^2 15^0}{2ctg15^0}$

5. Решить уравнения:

1) $\left(2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2ctgx + 1) = 0$

2) $2\sin 2x = 3\cos 2x$

3) $\sin 5x = \sin x$

4) $\left(1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{4}\right)(1 + \sqrt{3}ctgx) = 0$

5) $4\sin x + \cos x = 0$

6) $\left(1 + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot (tgx - \sqrt{3}) = 0$

7) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$

8) $(ctgx - \sqrt{3}) \cdot \left(2\sin\frac{x}{12} + 1\right) = 0$

9) $\sin x = 2\cos x$

10) $\cos x = \cos 3x$

6. Выясните, к какому типу относятся данные тригонометрические уравнения, и решите их:

$sin^2 x - 2sin x - 3 = 0$

$7sin^2 x - 8sin x cos x = 15cos^2 x$

$cos 2x = cos x$

$sin3x cos 2x = sin5x$

$2sin^2 x - 5cos x + 1 = 0$

$sin^2 x - 5sin x cos x + 6cos^2 x = 0$

$7sin x - 3cos 2x = 0$

$4sin2x cos 2x + 1 = 0$

$tg^2 x + 2tgx - 3 = 0$

$2sin^2 x - 5sin x cos x + 3cos^2 x = 0$

$sin2x = 2sin^2 x$

$cos x cos 3x = cos 5x cos 7x$

$2cos^2 x - 3cos x - 2 = 0$

$3cos^2 x = 4sin x cos x - sin^2 x$

$sin^2 x + cos^2 x = sin 2x$

$cos x cos 5x = 0{,}5 cos 4x$

$5tg^2 x - 13tgx - 6 = 0$

$3sin^2 x - 7sin x cos x + 2cos^2 x = 0$

$cos 2x + cos x = 0$

$cos 4x cos 2x = cos 5x cos x$

$2sin^2 x = 3cos x$

$sin^2 x + 1{,}5cos^2 x = 2{,}5 sin x cos x$

$sin2x - 2\sqrt{3}sin^2 x = 0$

$cos 3x - cos x = 0$

$2cos^2 x + 4sin^2 x = 3$

$sin^2 x + 2sin x cos x - 3cos^2 x = 0$

7. Решить неравенства:

$\cos x > \frac{1}{2}$ $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin x > -\frac{1}{2}$ $\cos x \le -1$ $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin x \ge 1$

$\cos x > 0$ $\sin x < -1$ $\sin 2x \prec -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 2x \prec -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \ge 0$

Вариант 1

1. Вычислить:
sin 2α, если tg α=3

2. Упростить выражение:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha\, tg\frac{\alpha}{2}} - \cos\alpha$$

3. Вычислить:

$$\frac{2\sin 10° + \sin 50°}{2\sin 80° - \sqrt{3}\sin 50°}$$

4. Вычислить:
cos(2α+β), если tg α = -5/12, ctg β = 3/4, π < β < 3π/2

5. Доказать тождество:
tg 3α = tg α (60°+α) tg (60°-α)

Вариант 2

1. Дано: $tg\,\alpha = 2{,}4, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите cos α, ctg 2α.

2. Упростить выражение:

$$\sqrt{200}\cos^2\left(5\frac{\pi}{8}\right) - \sqrt{50}$$

3. Упростить выражение:

$$\frac{\cos\ 4x + \cos\ 2x}{\cos\ 3x}$$

4. Вычислить:

$$\frac{\sin^2 26° - \sin^2 64°}{\sin 19° \cos 19°}$$

5. Определить знаки тригонометрических функций следующих углов:

$$201°, \quad 1151°, \quad \frac{8\pi}{15}, \quad \frac{17\pi}{15}$$

6. Доказать тождество:

$$\frac{1+tg\,\beta}{1+ctg\,\beta}=tg\,\beta$$

<u>Вариант 3</u>

1. Дано: $\cos\alpha = 0{,}6, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найдите sin α, tg α.

2. Найти значение выражения:

$2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$

3. Упростить выражение:

$\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$

4. Найти значение выражения:

$$2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$$

5. Найти значение выражения:

$$\cos 630^\circ-\sin 1470^\circ-ctg 1125^\circ$$

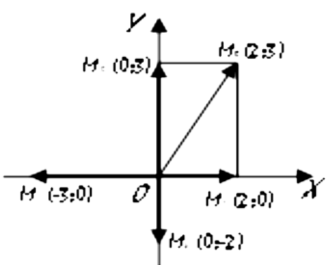
6. Вычислить:

$$\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$$

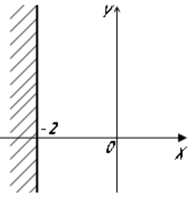
<u>Раздел 8. Комплексные числа</u>

Цель работы: повторение и систематизация знаний

1. Записать координаты следующих комплексных чисел и построить соответствующие им радиус-векторы:
1) z = 2; 2) z = -3; 3) z = 3i; 4) z = -2i; 5) z = 2 + 3i
Решение:
1) M_1 (2;0); 2) M_2 (-3;0); 3) M_3 (0;3); 4) M_4 (0;-2); 5) M_5 (2;3)



2. Найти множество точек, для которых Re z < -2
Решение:
Точки искомого множества удовлетворяют неравенству x < -2, т.к. Re Z = x (рис. 5).



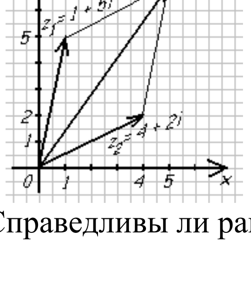
3. ельные числа *x* и *y* из условия равенства двух комплексных чисел:

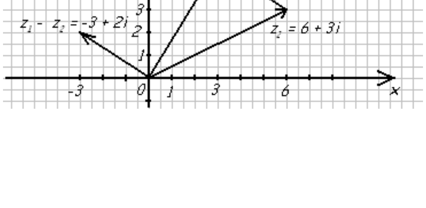
$-2 + 5ix – 3iy = 9i + 2x – 4y$
Решение:
Выделим в обоих частях равенства действительные и мнимые части данных комплексных чисел:
$-2 + (5x – 3y)\, i = 2x – 4y + 9i$
Теперь используя равенство комплексных чисел, составим систему
$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 3y = 9, \end{cases}$ решив которую, получим $x = 3$, $y = 2$
Ответ: 3, 2.

4. Найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел:
1) $z = i$; 2) $z = -5i$; 3) $z = 1 + i$; 4) $z = 2 – 2i$; 5) $z = -\sqrt{3} + i$; 6) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
Решение:
1) Здесь, $a = 0$ и $b = 1$. По формуле $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ получим
$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$; $\varphi = \pi/2$, так как вектор, изображающий данное число, лежит на положительной полуоси Oy.
2) Здесь, $a = 0$, $b = -5$; находим $r = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$; $\varphi = -\pi/2$, так как вектор, изображающий данное число, лежит на отрицательной полуоси Oy.
3) Здесь, $a = 1$, $b = 1$ (точка, изображающая данное число, лежит в I четверти);
$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg} \varphi = b/a = 1$; $\varphi = \pi/4$.
4) Здесь, $a = 2$, $в = -2$ (IV четверть); $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$; $\operatorname{tg} \varphi = b/a = -1$; $\varphi = -\pi/4$.
5) Здесь, $a = -\sqrt{3}$, $в = 1$ (II четверть); $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$; $\operatorname{tg} \varphi = b/a = -\sqrt{3}/3$; $\varphi = 5\pi/6$.
6) Здесь $a = -\sqrt{2}$, $в = -\sqrt{2}$ (III четверть); $r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$; $\operatorname{tg} \varphi = b/a = 1$; $\varphi = -3\pi/4$.
Ответ: 1) 1; $\pi/2$, 2) 5; $-\pi/2$, 3) $\sqrt{2}$; $\pi/4$. 4) $2\sqrt{2}$; $-\pi/4$, 5) 2; $5\pi/6$, 6) 2; $-3\pi/4$.

Действия над комплексными числами

1. Выполнить действия:
1) $(4 + 2i) + (1 + 5i)$
2) $(3 + 5i) – (6 + 3i)$
Решение:
По правилу сложения комплексных чисел получим:
$(4 + 2i) + (1 + 5i) = (4 + 1) + (2 + 5)\, i = 5 + 7i$
По правилу вычитания комплексных чисел получим:
$(3 + 5i) – (6 + 3i) = (3 – 6) + (5 – 3)\, i = -3 + 2i$
Сложение (вычитание) комплексных чисел сводится к сложению (вычитанию) векторов, изображающих эти числа. Действия над этими векторами иллюстрируются на рисунках.





2. Справедливы ли равенства:

$i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, где $k = Z$.

Решение:

Так как $i^2 = -1$, то $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, ….
Следовательно, мы получаем четыре чередующихся значения: $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, где $k = Z$, т.е. данные равенства справедливы.

3. Выполнить действия:
1) i^{16}; 2) i^{25}; 3) i^{15}; 4) $(-i)^8$; 5) $(-i)^7$; 6) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$; 7) $2i \cdot 3i$;
8) $(2 - 3i) \cdot (2 + 3i)$; 9) $(5 - 4i) \cdot (3 + 2i)$.

Решение:
1) $i^{16} = i^{4\cdot4} = 1$; 2) $i^{25} = i^{4\cdot6+1} = 1^6 \cdot i = i$; 3) $i^{15} = i^{4\cdot3+3} = i^3 = -i$;
4) $(-i)^8 = i^8 = i^{2\cdot4} = 1$; 5) $(-i)^7 = -i^7 = -i^{4+3} = -i^3 = -(-i) = i$;
6) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54} = i^{2\cdot3} + i^{4\cdot5} + i^{4\cdot7+2} + i^{4\cdot9} + i^{4\cdot13+2} = (-1)^3 + 1^5 + 1^7 \cdot i^2 + 1^9 + 1^{13} \cdot i^2 =$
$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1$;
7) $2i \cdot 3i = 6i2 = -6$;
8) $(2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 - 9 \cdot (-1) = 4 + 9 = 13$;
9) По правилу умножения комплексных чисел получим
$(5 - 4i) \cdot (3 + 2i) = [4\cdot3 - (-4) \cdot 2] + i\,[5\cdot2 + 3 \cdot (-4)] = 23 - 2i$.
Можно произвести умножение по правилу умножения многочленов, тогда
$(5 - 4i) \cdot (3 + 2i) = 15 + 10i - 12i + 8 = 23 - 2i$.

4. Выполнить деление: 1) $\frac{2}{3i}$; 2) $\frac{1}{1+i}$; 3) $\frac{1+i}{1-i}$; 4) $\frac{2-3i}{4+5i}$.

Решение:

1) Умножим делимое и делитель на i, получим $\frac{2}{3i} = \frac{2i}{3ii} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$;

2) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:
$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;

3) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$;

4) $\frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25} = \frac{-7-22i}{41} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i$

5. Вычислить $(1 + i)^8$
Решение:
Используя соотношение $(1 + i)^2 = 2i$, получим $(1 + i)^8 = [(1 + i)^2]^4 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$.
Ответ: 16.

Задания для практической работы

1. Выполнить действия с комплексными числами:

$(2 + 3i)(7 - i)$
$\frac{3+i}{3-i} + \frac{3-i}{3+i}$
$(3 + 4i)(3 - 4i)$
$(\sqrt{3} - i)^3$
$(2 - i)(2 + i)^2 - (3 - 2i) + 7$
$z_1 = -2 + 5i$ $z_2 = 3 - 4i$ $z_1 + z_2 - ?$ $z_2 - z_1 - ?$ $\frac{z_1}{z_2} - ?$

$i^{125} - i^{26}$

2. Решить уравнение:

$x - 3y + i = 3 - yi$
$5 + 2xi - yi = 8x + 12i$
$(1 + i)x + (-2 + 5i)y = -4 + 17i$
$z^2 + 4 = 0$
$z^2 - 6z + 25 = 0$
$z^2 + 15z + 17 = 0$
$3z^2 - 5z + 4 = 0$
$z^2 - 4z + 13 = 0$

<u>Раздел 9. Производная функции и её применение</u>

Цель работы: повторение и систематизация знаний

<u>Опр.</u>
Производной функции f(x) в точке x называется предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

<u>Опр.</u>
Операция нахождение производной называется дифференцированием.
Это правило является основным, т.к. выведено из самого определения. Однако при дифференцировании сложных функций, суммы, произведения, частного применение общего правила представляет большие трудности. Поэтому применяют правила дифференцирования.

Правила

1. $(f'(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$ - Производная суммы равна сумме производных.
2. $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$ - Постоянный множитель можно вынести за знак производной.
3. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$ - Производная произведения.
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)- f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ Производная частного

<u>Формулы дифференцирования</u>

1. $C' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^2)' = 2x$
4. $(x^3)' = 3x^2$
5. $(x^p)' = p\,x^{p-1}$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
11. $(\sin x)' = \cos x$
12. $(\cos x)' = -\sin x$
13. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
14. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
15. $(a^x)' = a^x \cdot \ln x$
16. $(\log x)' = \frac{1}{x\cdot \ln x}$

8. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

9. $(kx+b)' = k$

10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

17. $f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

18. $f'(kx+b) = k\cdot f'(kx+b)$

При решении задач на нахождение уравнения касательной к графику функции в точке используется геометрический смысл производной $f'(x_0) = k$

<u>*Уравнение касательной*</u> $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

<u>*Примеры:*</u>

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x,\quad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2,$$

$$(x^{-1})' = (-1)\,x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2},\quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Задача 4 Вычислить $f'(-3)$, если $f(x) = \sqrt{4-7x}$.

▶ Запишем данную функцию так: $f(x) = (-7x+4)^{\frac{1}{2}}$.

По формуле (2) находим $f'(x) = -\frac{7}{2}(-7x+4)^{-\frac{1}{2}}$.

При $x = -3$ получаем $f'(-3) = -\frac{7}{2}\,25^{-\frac{1}{2}} = -0{,}7$. ◁

Задача 5

Найти производную функции:

1) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$; 2) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1) $f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - (3)' = 3x^2 - 2x + 1$;

2) $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}$. ◁

ПРИМЕР 1. Заданы функции $f(x) = 2 + 6x^3$, $g(x) = tgx$. Задайте формулой сложную функцию h, если: а) $h(x) = g(f(x))$; б) $h(x) = f(g(x))$.

РЕШЕНИЕ. а) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = g(f(x))$ таким образом:

$$h(x) = g(f(x)) = tg\left(2 + 6x^3\right).$$

б) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = f(g(x))$ таким образом:

$$h(x) = f(g(x)) = 2 + 6tg^3x.$$

ПРИМЕР 2. Задайте формулами элементарные функции f и g, из которых составлена сложная функция $h(x) = g(f(x))$: а) $h(x) = (4x-9)^7$; б) $\sqrt{tgx}$.

РЕШЕНИЕ. а) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = g(f(x))$, где $g(y) = y^7$, $y = f(x) = 4x - 9$.

б) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = g(f(x))$, где $g(y) = \sqrt{y}$, $y = f(x) = tgx$.

ПРИМЕР 3. Найдите производные сложных функций: а) $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$; б) $h(x) = sin\left(3 - \frac{x}{2}\right)$

РЕШЕНИЕ. а) Так как $h(x)=g(f(x))$, где $g(y)=\sqrt{y}$, $y=f(x)=9-x^2$, то $g'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ и $y'=f'(x)=-2x$, откуда $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

б) Так как $h(x)=g(f(x))$, где $g(y)=sin\, y$, $y=f(x)=3-\dfrac{x}{2}$, то $g'(y)=cos\, y$ и $y'=f'(x)=-\dfrac{1}{2}$, откуда $h'(x)=cos\, y\cdot y'=cos\left(3-\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}cos\left(3-\dfrac{x}{2}\right)$

Наименьшее и наибольшее значения функции

Задание. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^4-2x^2-3$ на промежутке $[0;2]$.

№ шага	План нахождения y_{min} и y_{max} на $[a;b]$	Применение плана
1	Находим производную функции	$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$
2	Находим критические точки функции	$y'=0$, $4x(x^2-1)=0$, $x=0$ или $x^2-1=0$, $x=-1;0;1$ - критические точки функции
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри $[a;b]$	$0;1\in[0;2]$
4	Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка	$y(0)=-3$ $y(1)=1-2-3=-4$ $y(2)=16-8-3=5$
5	Из найденных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее	$y_{min}=y(1)=-4$, $y_{max}=y(2)=5$

Примеры. Применяя указанный выше план, найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$, если:

1) $f(x)=2x^2-4x+3$, $[0;4]$

2) $f(x)=3x^2-x^3$, $[-1;3]$

3) $f(x)=3x^3-9x^2+2$, $[-1;1]$

4) $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-4x$, $[0;2]$

5) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, $[-2;2]$

6) $f(x)=tgx+ctg2x$, $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$

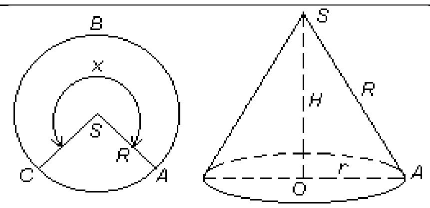
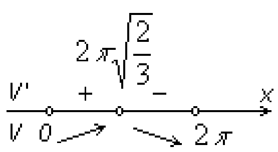
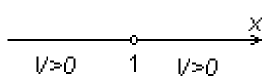
7) $f(x)=x+cos^2 x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

8) $f(x)=2x^2-ln\, x$, $[1;e]$

9) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+16}}$, $[-3;3]$

Геометрические задачи на нахождение оптимальных значений величин

Задание. Из кружка жести радиуса $\boldsymbol{R}$ вырезается сектор и из оставшейся части круга делается коническая воронка. При какой величине угла вырезаемого сектора объём воронки будет наибольшим?

№ шага	План решения	Применение плана
1	Строим рабочий чертеж	
2	Записываем исходную формулу для вычисления величины, экстремальное значение которой требуется найти	$V_к=\dfrac{1}{3}\pi r^2 H$
3	Вводим переменную величину x и выражаем через неё значения всех величин исходной формулы	Пусть x – величина центрального угла оставшегося сектора, тогда $\lvert\cup ABC\rvert = Rx$ и $\lvert\cup ABC\rvert = 2\pi r$, значит $2\pi r = Rx$ и $r=\dfrac{Rx}{2\pi}$. Высота воронки $H=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$
4	Подставляя найденные значения величин в формулу, представляем её как функцию аргумента x	$V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{R^2x^2}{4\pi^2}\cdot\dfrac{R}{2\pi}\cdot\sqrt{4\pi^2-x^2}$, $V=\dfrac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2x^2-x^6}$
5	Задаем (по смыслу задачи) область определения функции	$0<x<2\pi$, $D(V)=(0;2\pi)$
6	Функцию аргумента x исследуем на экстремум на найденном числовом промежутке	$V'(x)=\dfrac{R^3x^3(8\pi^2-3x^2)}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2x^4-x^6}}$, $V'(x)=0$, $8\pi^2-3x^2=0$, $x=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $V_{max}=V(2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}})$  

7	Записываем ответ	Величина вырезаемого угла равна $2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 66^0$

Пусть дана дифференцируемая функция y = f(x).
f ′ (x) - первая производная
f′′ (x) - вторая производная
С помощью второй производной находят интервалы выпуклости и вогнутости функции.

Признак вогнутости и выпуклости

Если вторая производная функции на данном промежутке положительная, то кривая вогнута,
если вторая производная - отрицательная, то - выпуклая, т.е
если f ′′ (x)> 0, то кривая вогнутая
если f ′′ (x) <0, то кривая выпуклая

Пример
Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции f (x) = x^3
Решение:
f ′ (x) = $3x^2$
f′′ (x) = 6x
f′′ (x) = 0
6 x = 0
x = 0
При x> 0 - f ′′ (x)> 0
При x <0 - f ′′ (x) <0
Значит при x>0 кривая вогнутая, а при x <0 кривая выпуклая.
Ответ: при x>0 кривая вогнутая, а при x <0 кривая выпуклая.

<u>Опр.</u>
Точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от её вогнутой части, называется точкой перегиба.

Признак существования точки перегиба

Если вторая производная непрерывна и меняет свой знак при переходе через x_0, то x_0 - точка перегиба.

Пример
Найти точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 2x^3$
Решение:
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$

$f''(x) = 0$ $\quad 12x^2 - 12x = 0$

$$12 \cdot x \cdot (x-1) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

x = -1 f ′′ (-1) = 12 (-1) (-1-1) = 24 (+)

$x=\frac{1}{2}$ $\quad f''\left(\frac{1}{2}\right)=-3 \quad (-)$

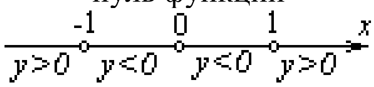
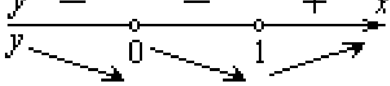
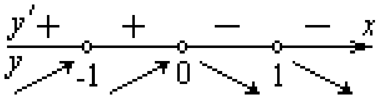
x = 2 $\quad$ f ″ (2) = 24 $\quad$ (+)

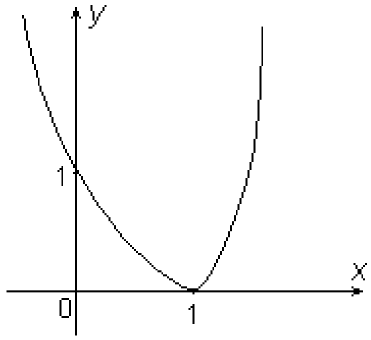
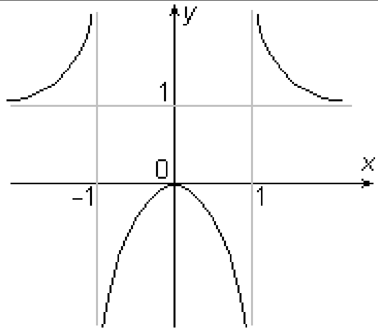
x = 0, x = 1 - точки перегиба

Ответ: x = 0, x = 1 - точки перегиба

Исследуйте и постройте графики функции

а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$; $\qquad$ б) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$.

№	План исследования Функции	Применение плана	
		а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$	б) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$
1	Находим область определения функции	$D(f)=R$	$x^2-1=0$, $x=\pm 1$, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x)=3x^4+4x^3+1\neq \pm f(x)$ $\Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная	$f(-x)=\frac{x^2}{x^2-1}=f(x) \Rightarrow$ функция четная
3	Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства	$3x^4-4x^3+1=0$, $\left(3x^4-3x^3\right)-$ $-\left(x^3-1\right)=0$, $(x-1)^2\left(3x^2+2x+1\right)=0$, $x-1=0$, $x=1$ - нуль функции	$\frac{x^2}{x^2-1}=0$, $x=0$ - нуль функции 
4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x)=\left(3x^4-4x^3+1\right)'=12x^3-$ $-12x^2=12x^2(x-1)$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=0;1$ - критические точки функции	$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'=$ $=\frac{2x\left(x^2-1\right)-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$ $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ - критическая точка функции
5	Находим промежутки монотонности , точки экстремума и экстремумы функции	 $y'(-1)<0, y'(0{,}5)<0, y'(2)>0$ x=0 – не является точкой экстремума, x=1 – точка минимума, $y_{min}=y(1)=0$	 $y'(-2)>0, y'(-0{,}5)>0$, $y'(0{,}5)<0, y'(2)<0$, x=0 – точка максимума, $y_{max}=y(0)=0$

6	Находим предел функции при $x \to \pm\infty$	$\lim\limits_{\Delta x \to \pm\infty} \left(3x^4 - 4x^3 + 1\right) = \infty$	$\lim\limits_{\Delta x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1$
7	Строим эскиз графика функции		

Задания для практической работы

1. Найти производную функции

$y = x^3 - 9x^2 + x - 1$ $\quad y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ $\quad y = x^2 \cdot \sin x$ $\quad y = \log_3 4x$ $\quad y = \dfrac{3}{5x^2}$

$y = 5x^4 - 3x^2 + 5$ $\quad y = \dfrac{x^2 + 1}{3x}$ $\quad y = \sin\left(x^2 - 2x + 4\right)$ $\quad y = x \cdot \sin 2x$ $\quad y = \sqrt{1 + x^3}$

$y = 6x^4 - 9e^x$ $\quad y = \sqrt{x + 5}$ $\quad y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ $\quad y = \log_5 10x$ $\quad y = tg(2x)$

$y = \dfrac{1}{4}x^8 + 3\sin x$ $\quad y = x \cdot 2^x$ $\quad y = \sin(2x + 5)$ $\quad y = \dfrac{3 - x}{x^2}$

2. Решить уравнение f′(x) = 0, если $f(x) = x - \cos x$

Решить уравнение f′(x) = 0, если $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

Решить уравнение f′(x) = 0, если $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3$

3. Написать уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0

$f(x) = x - 3x^2$ $\quad x_0 = 2$

Написать уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad x_0 = 3$

Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0 $\quad f(x) = 2\sqrt{x}$ $\quad x_0 = 3$ и написать уравнение касательной в этой точке.

Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0 $\quad f(x) = \dfrac{1}{3x^2}$ $\quad x_0 = 1$ и написать уравнение касательной в этой точке.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-0{,}5; 0{,}5]$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1; 1]$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=-x^4+2x^2+3$ на отрезке $[-0{,}5;0{,}7]$

5. Из квадратного листа жести со стороной 12 м надо изготовить бак с квадратным основанием без крышки наибольшего объема. Найдите размеры бака и его объем.

Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа. Чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?

6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции:

$y=x^4-6x^2+4$

$y=2x^4-12x^2+8$

7. Найти точки перегиба функции:

$y = x^5 - 80x^2$

$y = \cos x$, $-\pi < x < \pi$

$y=x^3-6x^2+4$

$y = \sin x$, $-\pi < x < \pi$

8. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{x}{2}-x^4$ на максимум и минимум.

Исследуйте функцию $f(x)=x^3-3x$ на максимум и минимум.

Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+5$ на максимум и минимум.

9. Исследуйте с помощью производной функцию и постройте ее график:

$f(x)=2x^3-3x^2+5$

$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+1{,}5x^2$

$f(x)=-x^3+3x+2$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{5}x^5$

$f(x)=-x^4+5x^2+4$

Вариант 1

1) Найти производную функции f(x), если:

$$y=\frac{\sin x}{3x^2+1}$$

2) Найти $f'(x_0)$, если:

$$y=3\sqrt{x}-x^3; \quad x_0=4$$

3) Составить уравнение касательной к Гф y=f(x) в точке с абсциссой x_0, если:

$$y=x^2+3^x; \quad x_0=1$$

4) Найти интервалы возрастания и убывания функции f(x) и точки экстремума. Найти интервалы выпуклости функции f(x) и точки перегиба:

$$y = \frac{1}{5}x^5 - 4x^2$$

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции f(x) на промежутке:

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + 2x - 1\frac{1}{3}; \qquad [-1; 2]$$

Вариант2

1) Найти производную функции f(x), если:

$$y = (x^5 - 13)\, e^{-2x}$$

2) Найти f '(x_0), если:

$$y = \frac{1}{x} + \ln x; \qquad x_0 = -2$$

3) Составить уравнение касательной к Гф y=f(x) в точке с абсциссой x_0, если:

$$y = \frac{x^2 - 4x}{x + 8}; \qquad x_0 = 1$$

4) Найти интервалы возрастания и убывания функции f(x) и точки экстремума. Найти интервалы выпуклости функции f(x) и точки перегиба:

$$y = x^3 - 10$$

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции f(x) на промежутке:

$$y = x^5 - x^3; \qquad [-1; 1]$$

Раздел 10. Первообразная функции и ее применение

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Первообразная

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором множестве X. Тогда функция $F(x)$, определенная на этом множестве, называется *первообразной функции* $f(x)$, если она дифференцируема для любых $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$.

Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на множестве X, то любая другая первообразная функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + c$, где c – некоторая постоянная.

Пример 1

Является ли функция $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на всей числовой прямой?

<u>Решение</u>

Находим производную от F(x)

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-\sin x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x=f(x)$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на всей числовой прямой.

Пример 2

Является ли функция F (x) = sin x первообразной для функции f (x) = cos x на всей числовой прямой?

<u>Решение</u>

Находим производную от F(x)
(sin x)’ = cos x = f(x)
Следовательно, по определению F (x) = sin x является первообразной для функции f (x) = cos x на всей числовой прямой.

Пример 3

Является ли функция $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ первообразной для функции $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на всей числовой прямой?

<u>Решение</u>

Находим производную от F(x)

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Следовательно, по определению $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ является первообразной для функции $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на всей числовой прямой.

Пример 4

Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$

Решение

По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$.

Точка М имеет две координаты по х и у, где $x=\frac{\pi}{4}, y=1+2\sqrt{\pi}$. Эти значения надо подставить в функцию F(x)

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C$$

Отсюда находим, что

$$1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C$$

$$C=2$$

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$

Неопределённый интеграл

Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X. Множество функций $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на X и обозначается:

$$\int f(x)\,dx$$

где ∫ – знак интеграла, f(x) – подынтегральная функция, dx – дифференциал функции, x – переменная интегрирования.

Таким образом,

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

Операция нахождения всех первообразных функции f (x) называется интегрированием этой функции. Интегрирование представляет собой задачу обратную дифференцированию.

Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. если F’(x) = f (x), то, например, ∫f(t) dt = F(t) + C; ∫f(z) dz = F(z) + C.

Свойства неопределённого интеграла

1) Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции, сложенной с постоянной С:

$$\int dxF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$$

2) Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\int f(x)dx=(\int f(x)dx)dx=(F(x)+C)'dx=(F'(x)+C)dx=f(x)dx$$

3) Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$(\int f(x)dx)'=(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)$$

4) Неопределенный интеграл алгебраической суммы равен сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

5) Постоянный, не равный нулю множитель, можно выносить за знак интеграла:

∫ kf (x)dx = k ∫ f (x)dx

Непосредственное интегрирование

Одним из основных методов интегрирования является непосредственное интегрирование. <u>Непосредственным интегрированием</u> называют приведение данного интеграла к алгебраической сумме более простых интегралов, используя основные правила интегрирования (свойства 4 и 5 неопределенного интеграла), тождественные преобразования подынтегральной функции и таблицу основных интегралов.

Найти интегралы:

Пример 1

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$$

Используем свойство №5 и формулу №2

Пример 2

$$\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6\frac{x^3}{3} = 2x^3 + C$$

Используем свойство №5 и формулу №3

Пример 3

$$\int \left(x^2 - x + 3\right)dx = \int x^2 dx - \int xdx + 3\int dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

Используем свойства №4 и 5, формулы №2 и 3

Пример 4

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x}dx = \int\left(\frac{x^3}{x} + \frac{3x^2}{x} + \frac{4x}{x}\right)dx = \int x^2 dx + 3\int xdx + 4\int dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + C$$

Используем свойства №4 и 5, формулы №2 и 3

Пример 5

$$\int \frac{3dx}{x} = 3\int \frac{dx}{x} = 3\ell n|x| + C$$

Используем свойство №5, формулу №4

Пример 6

$$\int 2^{3x} dx = \frac{2^{3x}}{3\ell n2} + C$$

Используем формулу №21

Пример 7

$$\int \ell^{-3x} dx = -\frac{\ell^{-3x}}{3} + C$$

Используем формулу №20

Пример 8

$$\int 5\sin(3x)dx = 5\int \sin(3x)dx = -\frac{5}{3}\cos 3x + C$$

Используем свойство №5, формулу №22

Пример 9

$$\int \frac{5dx}{4\cos^2(9x)} = \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\cos^2(9x)} = \frac{5}{4}\times\frac{1}{9}tg(9x) = \frac{5}{36}tg9x + C$$

Используем свойство №5, формулу №25

Пример 10

$$\int \frac{4dx}{6x^2-24} = 4\int \frac{dx}{6(x^2-4)} = \frac{4}{6}\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2-2^2} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2\times 2}\ell n\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \frac{1}{6}\ell n\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

Используем свойство №5, формулу №16

Пример 11

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16\left(\frac{9}{16}-x^2\right)}} = \int \frac{dx}{4\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\frac{4x}{3} + C$$

Используем свойство №5, формулу №14

Пример 12

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{7}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{7}{2}+1}}{-\frac{7}{2}+1} + c = -\frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} + c = -\frac{2}{5x^2\sqrt{x}} + c$$

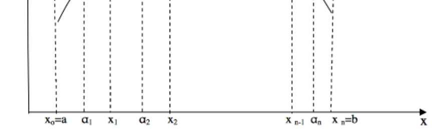
Преобразовываем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{x^3\sqrt{x}} = x^{-\frac{7}{2}}$$

И от получившегося выражения берём уже интеграл, используя формулу №3

Определённый интеграл

Пусть на отрезке [a; b] дана непрерывная функция y=f (x). Необходимо найти площадь криволинейной трапеции (*криволинейная трапеция* – часть плоскости, заключённая между графиком функции, осью OX и вертикальными прямыми x=a и x=b).



Разобьем отрезок [a; b] на n отрезков точками $x_0=a$, x_1 , x_2 … $x_n=b$. Длина каждого из отрезков будет равна: $\Delta x= x_1 – x_0$, … , $\Delta x_n= x_n – x_{n-1}$.

Внутри каждого отрезка разбиения возьмём точки α1, α2, …, αn и вычислим значения функции в этих точках: f (α1), f (α2), …, f(αn). Составим сумму площадей полученных прямоугольников:

$$S_n = f(\alpha_1)\Delta x_1 + f(\alpha_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\alpha_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i \quad (1)$$

Эта сумма называется интегральной суммой функции y=f (x) на отрезке [a; b] и представляет собой сумму площадей всех прямоугольников, следовательно, приближённо выражает площадь криволинейной трапеции, и тем точнее, чем больше число участков разбиения и чем меньше длина каждого из них.

Определенным интегралом от функции y = f (x) на отрезке [a; b] называется предел интегральной суммы (1), когда число участков разбиения стремится к бесконечности, а длина каждого из них стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to 0 \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$$

Где a и b называются пределами интегрирования, a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла

Геометрический смысл неопределённого интеграла – площадь криволинейной трапеции. Если функция y = f (x) непрерывна на отрезке [a; b], то интеграл от этой функции на данном отрезке существует.
Примечание: таким образом, определённый интеграл представляет собой число, зависящее от вида подынтегральной функции и от пределов интегрирования. А неопределённый интеграл представляет собой функцию от переменной x.

Свойства определённого интеграла

1. Если в определённом интеграле пределы интегрирования поменять местами, то знак интеграла поменяется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Константу можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3. Определённый интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) определённых интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx$$

4. Для любых чисел a, b, c справедливо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

5. Если пределы интегрирования равны друг другу, то интеграл равен 0:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

6. Если

$f(x) \geq 0 \; (f(x) \leq 0)$ для $x \in (a; b)$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \left(\int_a^b f(x)\,dx \leq 0 \right).$$

7. Если

$f_1(x) \leq f_2(x)$ для $x \in (a; b)$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Теорема Ньютона-Лейбница

Если функция f (x) непрерывна на интервале [a; b] и F(x) является её первообразной, то определённый интеграл от функции f (x) на [a; b] равен разности значений первообразной по верхнему и нижнему пределам интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

называется формулой Ньютона-Лейбница.

Порядок вычисления определённого интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1. Находим первообразную (т.е. интегрируем) – F(x)
2. Подставляем пределы интегрирования в получившуюся первообразную. Сначала верхний – F(b), затем нижний – F(a)
3. Находим разность значений F(b) и F(a) (F(b) – F(a))

Пример 1

Вычислить интеграл $\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right) dx$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t})\, dt.$

Решение.

$$\int\limits_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t})\, dt = \int\limits_0^1 \left(t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{2}}\right) dt = \left(\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^1$$
$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{12}.$$

Пример 3

Вычислите интеграл $\int\limits_{-2}^{2} \left(-4x + 4 + x^2\right) dx$

Решение.

Найдем множество всех первообразных для функции $-4x + 4 + x^2$:

$$F(x) = -4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot x + \frac{x^3}{3} + C = -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} + C\,.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

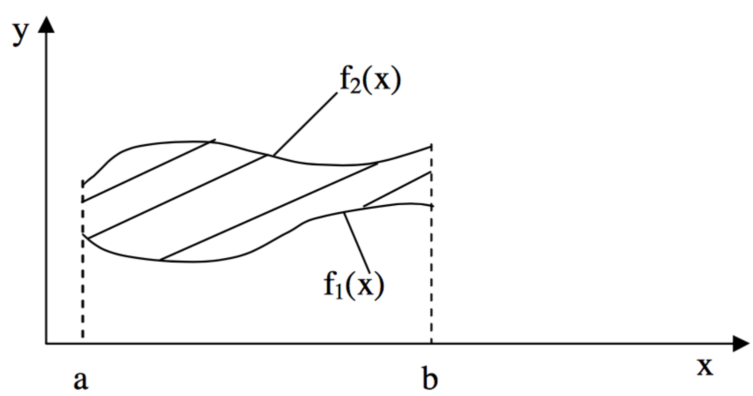
$$\int\limits_{-2}^{2} \left(-4x + 4 + x^2\right) dx = \left(-2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(-2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + \frac{2^3}{3}\right) - \left(-2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= \left(-8 + 8 + \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}$$

Вычисление площади плоских фигур

Пусть даны 2 функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.
Чтобы найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, необходимо:

1. Построить графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на координатной плоскости:



2. Посмотреть, даны ли в задании пределы интегрирования a и b. Если даны, то они будут в виде, например, x = 1 и x = 4 (значения могут быть любыми). Если не даны, то надо определить точки пересечения двух Гф $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Для этого приравняем их $f_1(x) = f_2(x)$, и, таким образом, найдём значения x, которые и будут являться пределами интегрирования. Нижний предел интегрирования – это меньшее значение x, верхний предел интегрирования – это большее значение x.

3. По Гф определяем, какая функция находится выше (ограничивает площадь сверху), а какая ниже (ограничивает площадь снизу) на промежутке [a; b].

4. Подставляем все значения в формулу и вычисляем полученные интегралы (определённый интеграл вычисляется по плану):

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$$

Обратите внимание:

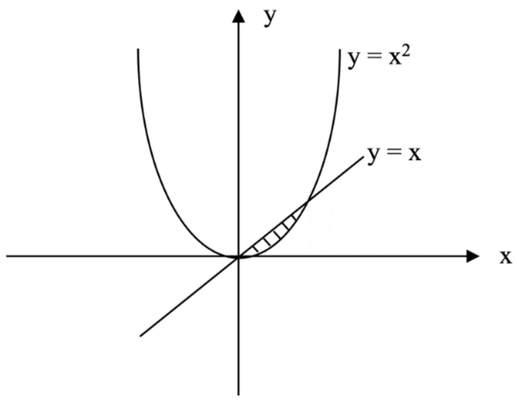
- Площадь измеряется в квадратных единицах. Например, S = 12 кв. ед.
- Площадь не может быть отрицательной! Если у вас получилось отрицательное значение, то проверяйте ваше решение!

Пример 1

Найти площадь фигуры, заключённой между графиками функций $y = x$ и $y = x^2$.

Решение:

1. Построим Гф на координатной плоскости:



2. Пределы интегрирования в задании не даны, значит их надо найти. Для этого приравняем Гф друг к другу:

$x = x^2$

$x^2 - x = 0$

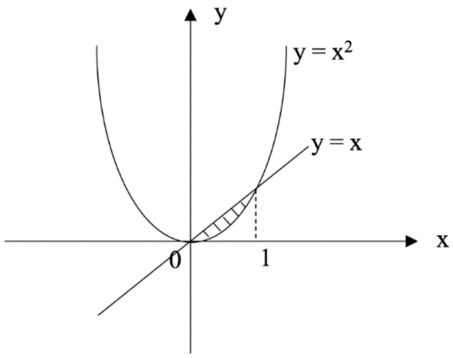
$x(x - 1) = 0$

$x = 0$ или $x - 1 = 0$

$x = 0$ или $x = 1$ (пределы интегрирования)

$x = 0$ – нижний предел интегрирования

$x = 1$ – верхний предел интегрирования



3. y = x – ограничивает площадь сверху
    y = x^2 – ограничивает площадь снизу
на промежутке от 0 до 1.
4. Подставляем все значения в формулу:

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$$

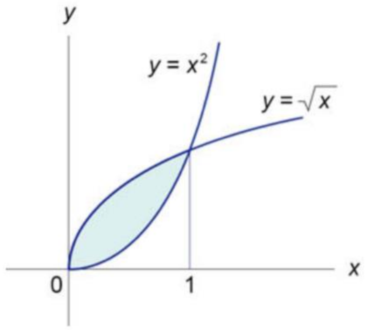
$$S = \int_0^1 xdx - \int_0^1 x^2dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{6}$$ кв. ед.

Пример 2

Найти площадь фигуры, заключённой между графиками функций y = √x и y = x^2.

Решение:

1. Построим Гф на координатной плоскости:



2. Пределы интегрирования в задании не даны, значит их надо найти. Для этого приравняем Гф друг к другу:

$$x^2 = \sqrt{x}, \ \Rightarrow x^2 - \sqrt{x} = 0, \ \Rightarrow \sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 0, \ \Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 1$$

x = 0 – нижний предел интегрирования
x = 1 – верхний предел интегрирования

3. y = √x – ограничивает площадь сверху
    y = x^2 – ограничивает площадь снизу
на промежутке от 0 до 1.

4. Подставляем все значения в формулу:

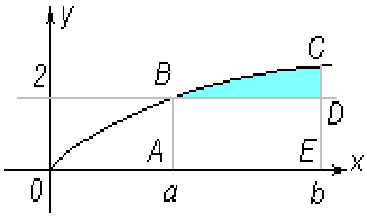
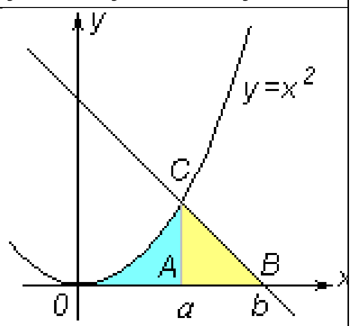
$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx$$

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{1}{3}\left.\left(2\sqrt{x^3}-x^3\right)\right|_0^1=\frac{1}{3}$$ кв. ед.

Пример 3

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sqrt{x},\ y=2,\ x=9$; б) $y=x^2,\ y=2-x,\ y=0$.

№	План вычисления площади криволинейной трапеции	Применение а) $y=\sqrt{x},\ y=2,\ x=9$	плана б) $y=x^2,\ y=2-x,\ y=0$
1	Строим заданные линии и штриховкой отмечаем фигуру, площадь которой надо найти. Установим, является ли эта фигура криволинейной трапецией		
2	Записываем формулу для вычисления площади искомой фигуры	$S=S_{ABCDE}-S_{ABDE}=$ $=\int_a^b\sqrt{x}dx-\int_a^b 2dx$	$S=S_{OAC}+S_{ACB}=$ $=\int_0^a x^2dx+\int_a^b(2-x)dx$
3	Находим пределы интегрирования	$\begin{cases}y=\sqrt{x},\\ y=2;\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$ $a=x_A=4,\ b=x_B=9$	$\begin{cases}y=x^2,\\ y=2-x;\end{cases}\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=-2;1$
4	Вычисляем искомую площадь по формуле	$S=\int_4^9\sqrt{x}dx-\int_4^9 2dx=\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right\|_4^9 -$ $-\left.2x\right\|_4^9=\frac{2}{3}(27-8)-2(9-4$ $=\frac{8}{3},$ $S=2\frac{2}{3}$ (кв.ед.)	$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx=$ $=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right\|_1^2=\frac{1}{3}$ $+\left(4-\frac{4}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6},$ $S=\frac{5}{6}$ (кв.ед.)

С помощью определённого интеграла можно решать различные задачи физики, геометрии и т.д., которые трудно или невозможно решить методами элементарной математики.

Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном, неравномерном движении

$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(x)\, dx$ - путь, пройденный телом за время от t_1 до t_2,

$\upsilon(x)$ - скорость неравномерного движения

Задача

Скорость движения материальной точки задаётся формулой $\upsilon(x) = 4t^3 - 2t + 1$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 4 с от начала движения.

Решение

$$S = \int_0^4 \left(4t^3 - 2t + 1\right) dt = \left(\frac{4t^4}{4} - \frac{2t^2}{2} + t\right)\Bigg|_0^4 = \left(t^4 - t^2 + t\right)\Big|_0^4 = 4^4 - 4^2 + 4 - 0 = 256 - 16 + 4 = 244\ м$$

Ответ: 244 м

Вычисление работы, затраченной на растяжение и сжатие пружины

$A = k\int_{x_1}^{x_2} x\, dx$ - работа силы упругости, где k – коэффициент упругости пружины, x_1 – начальное положение пружины, x_2 – конечное положение пружины.

F = k · Δ x - закон Гука, где k – коэффициент упругости пружины, Δ x - изменение длины пружины.

Задача

Какую работу совершает сила в 10 Н при растяжении пружины на 2 см?

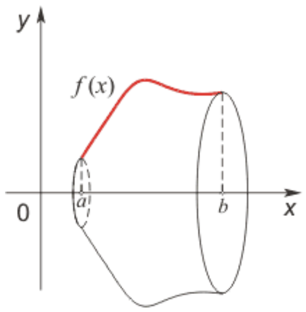
Решение

$$F = k \cdot \Delta x \qquad k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{10}{0{,}02} = \frac{1000}{2} = 500\,\text{Н/м}$$

$$A = 500\int_0^{0{,}02} x\, dx = 500\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}02} = 250x^2\Big|_0^{0{,}02} = 250 \cdot 0{,}02^2 - 0 = 250 \cdot 0{,}0004 = 0{,}1\ Дж.$$

Ответ: A = 0,1Дж

Определение объёма тела вращения



$v = \int_a^b S(x)\, dx = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\, dx$ - объём тела вращения, где S(x) – площадь сечения фигуры плоскостью перпендикулярной оси Ox.

Задания для практической работы

1. Является ли функция $F(x)=x^2+3x+1$ первообразной для функции $f(x)=2x+3$ на всей числовой прямой?

Является ли функция $F(x)=-\frac{x^4}{4}+5x+2$ первообразной для функции $f(x)=-x^3+5$ на всей числовой прямой?

2. Для функции $f(x)=sin\,2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};-2\right)$

Для функции $f(x)=(4-5x)^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(1;\frac{1}{20}\right)$

3. Найти неопределённые интегралы

$$\int\left(9x^2-\frac{1}{x^2}+6\sqrt{x}+1\right)dx \qquad \int\left(\sqrt[5]{x}-5\sqrt{x}+4^x\right)dx$$

$$\int\frac{(x^2+3)(x-1)}{x^2}dx \qquad \int\frac{3x^3(x+2)}{2x^2}dx$$

$$\int\frac{5^{x+2}+7^{x+1}}{35^x}dx \qquad \int e^{3x}\cdot3^x dx$$

4. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2\left(2x+3x^2\right)dx \qquad \int_0^2\left(2^x e^x+\frac{1}{1+x^2}+x^3\right)dx$$

$$\int_0^2\sin(1+2x)\,dx \qquad \int_0^1\left(2x^2-7x+5\right)dx$$

$$\int_0^{\lg 2}e^x\,dx \qquad \int_0^1\frac{3\,dx}{(2x-1)^4}$$

$$\int_2^7\frac{4}{\sqrt{x+2}}dx \qquad \int_1^2\left(\frac{x^6-3}{x}+4^{2x+1}\right)dx$$

$$\int_1^2\frac{\left(3\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) параболой $y=(x+1)^2$, прямой $y=1-x$ и осью Ox
2) параболой $y=x^2-4x+3$ и осью Ox
3) графиком функции $y=\sin x$, и отрезком $[\pi; 2\pi]$ оси Ox.) параболой $y=4-x^2$ и осью Ox
4) графиком функции $y=\sqrt{x}$, прямой $y=x+2$ и прямыми $x=0$, $x=4$
5) графиком функции $y=\cos x$ и отрезком $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ оси Ox
6) Скорость прямолинейно движущегося тела $\nu=(4t-t^2)$ м/с. Вычислить путь, пройденный телом за первые 5 сек.
7) Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для её сжатия на 0,02 м требуется сила в 10 Н.

6. Вычислить определённый интеграл

1) $\int_{-1}^{2}\left(1-3x^2\right)dx$

2) $\int_{-2\pi}^{\pi}\sin 2x\, dx$

3) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

4) $\int_{1}^{2}\frac{1}{2}\cdot 4^{2x+1}dx$

5) $\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{(2+x)^3}+\cos 2x\right)dx$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
а) параболой $y = 4 - x^2$ и осью Ox
б) графиком функции $y = \sqrt{x}$, прямой $y = x + 2$ и прямыми $x= 0$, $x = 4$

Задача

Скорость прямолинейно движущегося тела $V(t)=3t^2-5t+2$ м/с. Вычислить путь, пройденный телом за первые 4 с.

Раздел 11. Множества. Элементы теории и графов

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Для обозначение множества служит пара фигурных скобок {….}, внутри которых перечисляются элементы множества. Существует три способа задания множества: перечисление описание, порождающие процедуры. Во втором случае элементы множества определяются по заданному закону (правилу). Например, A={x|(утверждение об x)}, которое читается как: “A есть множество таких элементов x, для которых (утверждение об x) верно”. Или можно записывать и так: A={x|P(x)}, которое читается как “A есть множество таких элементов x, которые обладают свойством P”.
Порождающей процедурой называется способ получения элементов множества из уже полученных элементов. Например, множество A всех целых чисел, являющихся степенями числа 2 может быть представлено порождающей процедурой, заданной двумя правилами, называемыми рекурсивными или индуктивными: а)$1\in A$; б) если $x\in A$, то $2\cdot x\in A$.
Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается символом $\varnothing$. Между различными множествами может существовать отношение включения, как отношение “быть подмножеством”. Множество A является подмножеством B, если любой элемент множества A принадлежит множеству B. Это определение записывают в виде $A\subset B$, где символ $\subset$ означает включение. Для подмножеств справедливо свойство рефлексивности ($A\subseteq A$) и транзитивности [$(A\subseteq B$ и $B\subseteq C)\rightarrow A\supseteq C$]. Кроме того, для любого множества A справедливо $\varnothing\supseteq A$. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$.
Если A – конечное n-элементное множество, тогда имеется ровно 2^n различных подмножеств, составленное из элементов множества A, включая несобственные подмножества $\varnothing$ и A. Множество всех подмножеств данного множества A называется степенью множества A или булеаном $\beta(A)$.

Если при некотором рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фиксированного множества I, то это самое большое множество называется универсальным (полным) множеством и графически обозначается в виде точек прямоугольника, отдельные области которого обозначают различные подмножества I. Такое изображение множеств называется диаграммой Эйлера – Венна.

Основные операции над множествами:

- Объединение: $A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$;
- Пересечение: $A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$;
- Разность: $A \setminus B = \{x | x \in A$ и $x \notin B\}$;
- Симметрическая разность: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
- Дополнение: $\overline{A} = I \setminus A = \{x | x \in I$ и $x \notin A\}$.

Система множеств $X = \{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ называется *разбиением множества* A, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $X_i \in X$ и $X \subset A$;
- $X_i \in X$, $X_j \in X$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$;
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = A$.

Свойства операций пересечения и объединения являются двойственными при замене знаков $\cup$ на $\cap$, $\varnothing$ на I и наоборот, поэтому основные тождества и законы алгебры множеств можно записать следующим образом:

1. $A \cup \varnothing = A$,	$A \cap I = A$;
2. $A \cup \overline{A} = I$,	$A \cap \overline{A} = \varnothing$;
3. $A \cup I = I$,	$A \cap \varnothing = \varnothing$;
4. $\overline{\varnothing} = I$,	$\overline{I} = \varnothing$;
5. $A \cup A = A$,	$A \cap A = A$;
6. $\overline{\overline{A}} = A$.	
7. $A \cup B = B \cup A$,	$A \cap B = B \cap A$;
8. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
9. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
10. $A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
11. $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \overline{A}_n$	$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \overline{A}_n$

Пример 1. Задать различными способами множество A всех четных чисел 2, 4, 6, …., не превышающих 1000.

Решение. 1. Перечислением: $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 998, 1000\}$;

1. Описанием: $A = \{x | x \in N$ и $x/2 \in N$, $N \le 1000\}$; (N – множество натуральных чисел 1, 2, 3, ….)
2. Порождающей процедурой: а) $2 \in A$; б) если $x \in A$, то $(x+2) \in A$; в) $x \le 1000$.

Пример 2. Верно ли, что: 1). $\{\{1,2\}, \{2,3\}\} = \{1,2,3\}$? 2). $\{\{1,2\}\} = \{1,2\}$?

Решение. 1). Нет, так как элементами первого множества являются подмножества $\{1,2\}$ и $\{2,3\}$, а второго – элементы 1,2,3.

2). Нет, так как первое множество одноэлементное, состоящее из одного элемента - подмножества, а второе имеет два элемента 1 и 2.

Пример 3. Перечислить элементы следующих множеств:
1). $A=\{a|a\subseteq B,\ B=\{1,2,3\}\}$;
2). $A=\{a|a\in B,\ B=\{1,2,3\}\}$.

Решение. 1). Так как $a\subseteq B$, а B – трехэлементное множество, то имеется $2^3=8$ подмножеств: $A=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \varnothing\}$.
2). Так как $a\in B$, то $A=B=\{1,2,3\}$.

Пример 4. Доказать, используя тождества алгебры множеств, что $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$.

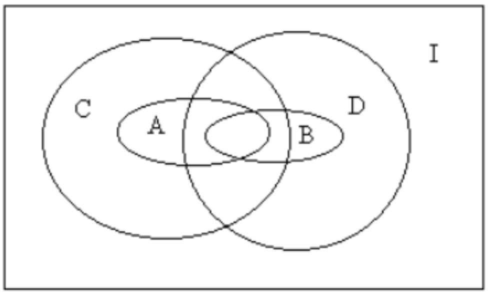
Решение. Используя тождества алгебры множеств, получаем
$$A\cup(B\setminus A)=A\cup(B\cap\overline{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})=(A\cup B)\cap I=A\cup B.$$

Пример 5. Упростить выражение $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

Решение. Используя законы и тождества алгебры множеств, получаем:
$$(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C}=[(A\cup\overline{A})\cap B\cap C]\cup\overline{B}\cup\overline{C}=$$
$$I\cap B\cap C\cup\overline{B}\cup\overline{C}=(B\cap C)\cup(\overline{B\cap C})=I$$

Пример 6. Построить диаграммы Венна для множеств A, B, C, $D\subset I$, если $A\cup B\subset C\cup D$, $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap D\neq\varnothing$.

Решение. Одно из возможных решение может быть представлено следующей диаграммой:

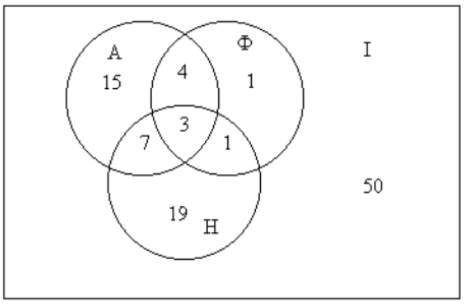


Пример 7. Опрос 100 студентов, изучающих иностранные языки, показал: английский язык изучают 29 студентов, немецкий –30, французский –9, только французский - 1, английский и немецкий – 10, немецкий и французский – 4, все три языка – 3 студента. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только немецкий язык? При решении использовать диаграммы Венна.

Решение. Введем обозначения: I – множество всех опрошенных студентов; A – множество студентов, изучающих английский язык; Н – множество студентов, изучающих немецкий язык; Ф – множество студентов, изучающих французский язык (См. диаграмму Эйлера-Венна на рис. 1.1)

По условию задачи очевидно, что $A\cap Ф\cap Н=3$, тогда $(Н\cap Ф)\setminus(A\cap Ф\cap Н)=4-3=1$; $(A\cap Н)=(A\cap Ф\cap Н)=10-3=7$. В таком случае только немецкий язык изучают 30-7-3-1=19 студентов.

Из условия задачи также слежует, что $(A\cap Ф)\setminus(A\cap Ф\cap Н)=9-1-1-3=4$, а поэтому только английский язык изучают 29-4-3-7=15 студентов. Тогда число студентов, не изучающих ни одного языка, будет равно $I\setminus(A\cup Ф\cup Н)=100-(1+1+3+4+7+15+19)=50$ студентов.



Элементы теории графов

Пусть X – множество вершин, V –множество ребер, соединяющие вершины. Граф G=(X,V) считается заданным, если дано множество его вершин X и способ отображения Г этого множества в самого себя.

Подграфом G_A графа G=(X, Г) называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G, образующих множество А, вместе с дугами, соединяющими эти вершины:

$$G_A = (A, \Gamma_A),$$

где $A \subseteq X, \quad \Gamma_A x = (\Gamma x) \cap A.$

Частичным графом G_Δ по отношению к графу G=(X, Г) называется граф, содержащий только часть дуг графа G, т.е. определяемый условием:

$$G_\Delta = (X, \Delta), \text{ где } \Delta x \subseteq \Gamma x.$$

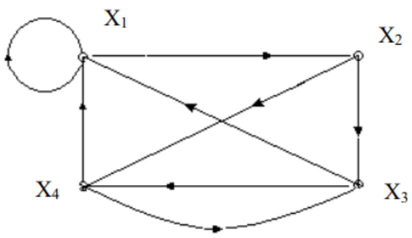
Важными понятиями в теории графов являются понятия пути, длины пути, контур

. Для описания графа используются матрицы смежности и матрицы инцидентности.

Пример

Построить граф G, заданный множеством вершин X={X_1, X_2, X_3, X_4} и их отображениями Г(X_1)={X_1, X_2}, Г(X_2)={X_3, X_4}, Г(X_3)={X_1, X_4}, Г(X_4)={X_1, X_2, X_3}.

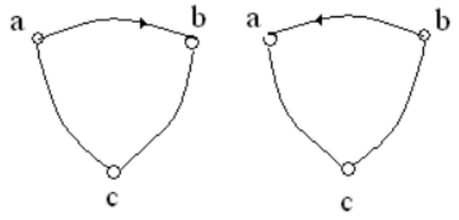
Решение



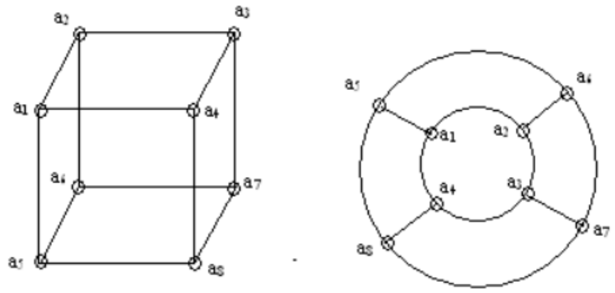
Два графа G1 и G2 изоморфны, если существует такое взаимно-однозначное соответствие между множествами их вершин X1 и X2, что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу.

Пример

Изоморфны ли графы, изображенные на рисунках?



A_1 A_2



B_1 B_2

Решение

Графы A1 и A2 не изоморфны, хотя они и имеют одинаковое число вершин и ребер. Но в графе A1 одно из ребер направлено от a к b, а в графе A2 оно направлено в другую сторону. Графы B1 и B2 изоморфны, т.к. они имеют одно и то же число вершин и любые две вершины графа B1 соединены ребром только тогда, когда соответствующие им вершины графа B2 также соединены ребром.

Задания для практической работы

1.

Пусть $A=\{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$. Верно ли, что $\{1, 2\}\in A$?
$\{1, 2\}\subset A$?

2.

Перечислить элементы следующих множеств:

$A=\{x \mid x\in\{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,c,d\}\}\}$;

$B=\{x \mid x\subset\{a,b,c,d\}\}$;

$C=\{x \mid x\subseteq\{a,b,c,d\}\}$.

3.

Перечислите все элементы множества

$P\subseteq A=\{\{1, 2\},\{3\},1\}$.

4.

Пусть $I=\{1,2,3,4,5\}$, $X=\{1,5\}$, $Y=\{1,2,4\}$, $Z=\{2,5\}$.

Найти множества:

а) $X\cap\overline{Y}$; б) $(X\cap Z)\cup\overline{Y}$; в) $X\cup(Y\cap Z)$; г) $(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$;

д) $\overline{X\cup Y}$; е) $\overline{X}\cap\overline{Y}$; ж) $\overline{X\cap Y}$; з) $(X\cup Y)\cup Z$; и) $X\cup(Y\cup Z)$;

к) $X\setminus Z$; л) $(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)$.

5. Упростить выражения:

$\overline{A\cap\overline{B}}\cup B;$

$\overline{\overline{\overline{(A\cup\overline{B})}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})}\cup(A\cup B)};$

$\overline{\overline{(A\cup\overline{B})}\cup\overline{(\overline{A}\cup B)}\cap(A\cup B)};$

$\overline{[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)\cup(B\cap D)]\cap\overline{(A\cap B\cap C\cap D\cup I)}};$

$(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap B)\cup\overline{B}\cup$
$(A\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D});$

$(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D});$

6. Для произвольных множеств A, B, C, D $\subset$ I построить диаграммы Эйлера-Венна при условии:

1) $A, B, C\subset D;\quad A\cap B\cap C\neq\varnothing;$
2) $C\subset A\cap B;\quad D\subset B;\quad C\cap D\neq\varnothing;$
3) $A\subset B;\quad C\subset D;\quad A\cap D=\varnothing;\quad B\cap C=\varnothing;$
4) $C\subset A\cup B;\quad (A\setminus B)\cap C\neq\varnothing;\quad (B\setminus A)\cap C\neq\varnothing$

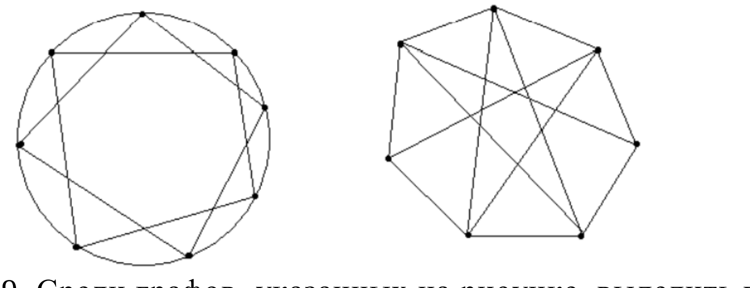
7. Решите задачи с использованием диаграммы Эйлера-Венна:

В студенческом потоке 37 человек хорошо знают математику, а 25 человек – электронику, и 19 человек хорошо знают и математику, и электронику. Если в потоке каждый из студентов знает хотя бы один из этих предметов, то сколько студентов в потоке?

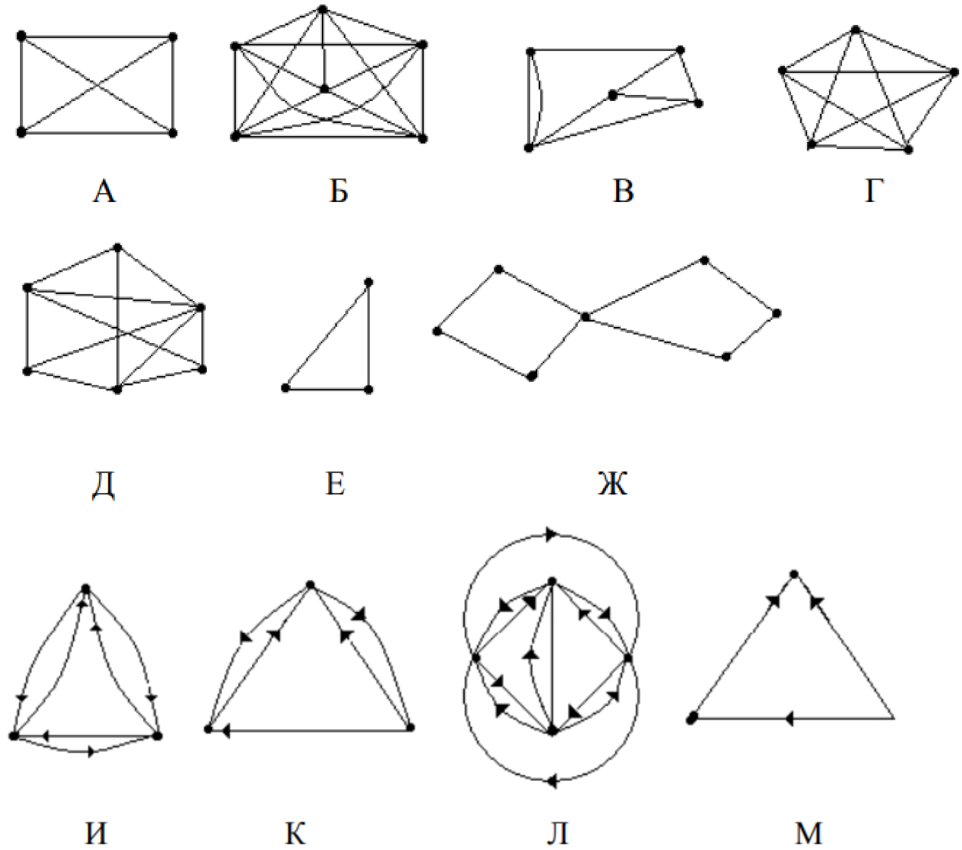
Из 250 студентов 151 изучают немецкий язык, 136 – французский язык, 27 – итальянский, 63 – французский и немецкий, 7 – итальянский и французский, 11 – немецкий и итальянский, 4 – все три языка. а) Сколько студентов изучают немецкий или французский язык? б) Сколько студентов изучают только итальянский язык? в) Сколько студентов изучают немецкий и французский язык, но не итальянский? г) Сколько студентов не изучают ни одного языка? д) Сколько студентов изучают хотя два иностранных языка?

Каждый из 500 студентов обязан посещать хотя бы один из трех спецкурсов: по математике, физике, астрономии. Три спецкурса посещают 10 студентов, по математике и астрономии –25 студентов, спецкурс только по физике – 80 студентов. Известно также, что спецкурс по математике посещают 345 студентов, по физике – 145, по астрономии – 100 студентов. Сколько студентов посещают спецкурс только по астрономии? Сколько студентов посещают два спецкурса?

8. Показать, что два графа на рисунке изоморфны.



9. Среди графов, указанных на рисунке, выделить полные графы (без учета петель).



10. Построить графы, матрицы смежности которых указаны:

$$M_1=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix};\quad M_2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix};\quad M_3=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix};\quad M_4=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix};$$

Раздел 12. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Опр. **Перестановками** из n разных элементов называются соединения, которые состоят из n элементов и отличаются друг от друга только порядком их расположения.
Число перестановок из п элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле Рп = ***n!***
n! (n – факториал) n! = 1·2·3·4·5·… n

Пример
Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на котором поставлены 12 приборов?
Решение
$\mathbf{P_{12} = 12!} = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots 12 = 479\,001\,600$
Ответ: 479 001 600

Опр. Комбинации из m элементов по n элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются **размещениями.**

Обозначаются A_m^n и вычисляются по формуле $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$, $A_n^n = n!$

Пример
Сколько существует вариантов распределения трёх призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?
Решение
$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$$
Ответ: 210 вар

<u>*Опр.*</u> <u>**Сочетаниями**</u> называются все возможные комбинации из *m* элементов по *n*, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.

Обозначают C_m^n и вычисляют по формуле $C_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$

Пример
Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 2 карты?
Решение
$$C_{36}^2 = \frac{36!}{(36-2)! \cdot 2!} = \frac{36!}{34! \cdot 2!} = 630$$
Ответ: 630 способов

Бином Ньютона

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m.$$

Задача 1 Записать разложение бинома $(x-2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

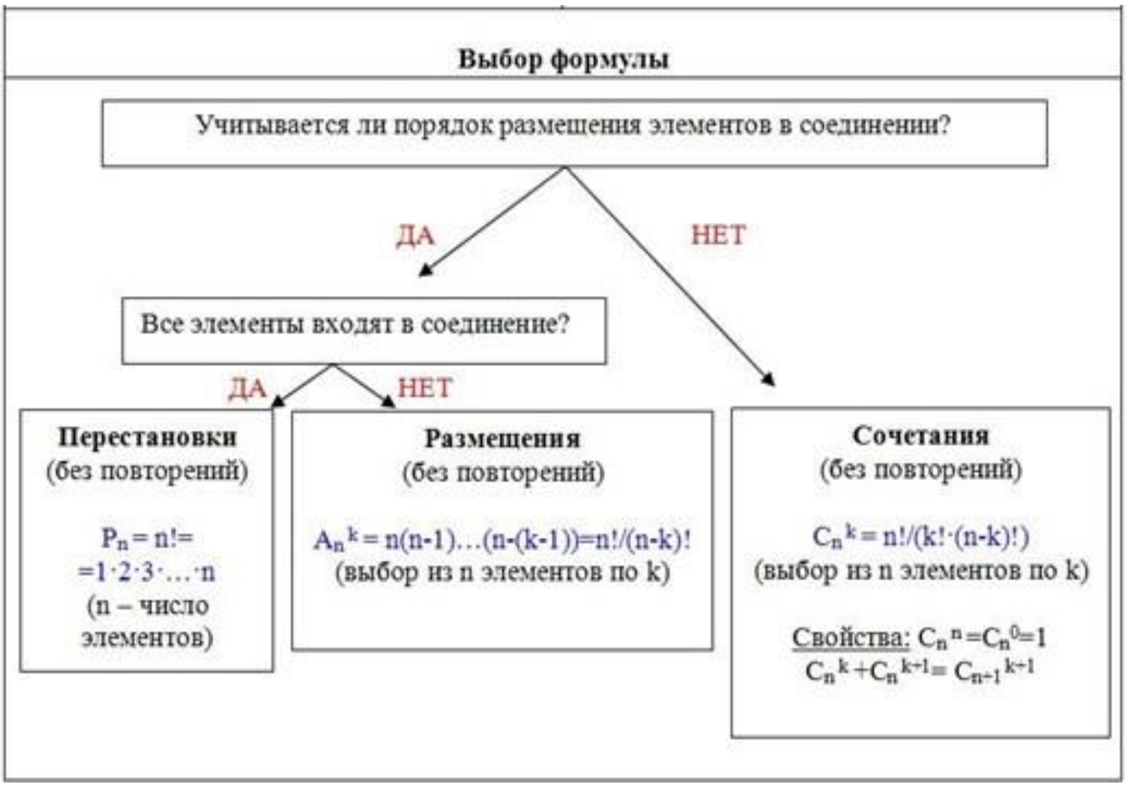
$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$
$$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5 \cdot (-2) + C_6^2x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3x^3 \cdot (-2)^3 + C_6^4x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) + 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64.$$ ◁

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил – **правила суммы и правила произведения**.

Выбор правила	**Выбор правила**
Правило суммы	**Правило произведения**
Если некоторый объект А можно выбрать **m** способами, а другой объект В можно выбрать **n** способами, то выбор объекта <u>либо А, либо В</u> можно осуществить **m + n** способами.	Если объект А можно выбрать **m** способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать **n** способами, то выбор <u>пары А и В</u> можно осуществить **m · n** способами.

Задача 1
В магазине «Все для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколько вариантов чашки и блюдца можно купить?
Решение
Чашку мы можем выбрать 6-ю способами, а блюдце 4-я способами. Так как нам надо купить пару чашку и блюдце, то это можно сделать $6 \cdot 4 = 24$ способами (по правилу произведения).
Ответ: 24.

Для успешного решения комбинаторных задач надо еще и правильно выбрать формулу, по которой искать количество нужных соединений. В этом поможет следующая схема.



Рассмотрим решение нескольких задач на разные виды соединений без повторений.

Задача 2
Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.
Решение
Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок учитывается и не все элементы одновременно выбираются. Значит, это соединение – размещение из 7 элементов по 3. Воспользуемся формулой для числа размещений: $A_7^3 = 7(7 - 1)(7 - 2) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ чисел.
Ответ: 210.

Задача 3
Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные, а номер не может начинаться с нуля?
Решение
На первый взгляд эта задача такая же, как и предыдущая, но сложность в том, что надо не учитывать те соединения, которые начинаются с нуля. Значит необходимо из существующих 10-ти цифр составить все семизначные номера телефонов, а потом от

полученного числа отнять количество номеров, начинающихся с нуля. Формула будет иметь вид:
$A_{10}^7 – A_9^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 – 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 544\,320$.
Ответ: 544 320.

Задача 4
Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?
Решение
Сначала примем 5 сборников условно за одну книгу, потому что они должны стоять рядом. Так как в соединении существенным есть порядок, и все элементы используются, значит это перестановки из 8 элементов (7 книг + условная 1 книга). Их количество P_8. Далее будем переставлять между собой только сборники стихотворений. Это можно сделать P_5 способами. Поскольку нам нужно расставить и сборники, и другие книги, то воспользуемся правилом произведения. Следовательно, $P_8 \cdot P_5 = 8! \cdot 5!$. Число способов будет большим, поэтому ответ можно оставить в виде произведения факториалов.
Ответ: 8! · 5!

Задача 5
В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?
Решение
Сначала отдельно выберем 4 мальчика из 16 и 3 девочки из 12. Так как порядок размещения не учитывается, то соответственные соединения – сочетания без повторений. Учитывая необходимость одновременного выбора и мальчиков, и девочек, используем правило произведения. В результате число способов будет вычисляться таким образом:
$C_{16}^4 \cdot C_{12}^3 = (16! / (4! \cdot 12!)) \cdot (12! / (3! \cdot 9!)) = ((13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16) / (2 \cdot 3 \cdot 4)) \cdot((10 \cdot 11 \cdot 12) / (2 \cdot 3)) = 400\,400$.
Ответ: 400 400.

Таким образом, успешное решение комбинаторной задачи зависит от правильного анализа ее условия, определения типа соединений, которые будут составляться, и выбора подходящей формулы для вычисления их количества.

<u>Опр</u>. Событие – это любое явление, которое происходит или не происходит или результат испытаний, наблюдений и явлений. События обозначают заглавными латинскими буквами A, B, C, …
Примеры случайных событий: выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, отказ технического устройства, искажение сообщения при передаче его по каналу связи.
Долю успеха того или иного события называют вероятностью этого события и обозначают P(A)
<u>Опр</u>. Если в некотором испытании существует п равновозможных попарно несовместных исходов и т из них благоприятствуют событию А, то вероятностью наступления события А называют отношение $\frac{m}{n}$ и записывают $P(A) = \frac{m}{n}$
<u>Пример</u>: найти вероятность появления при одном бросании игральной кости числа очков, большего 4.
<u>Решение</u>: А – « появление числа очков, большего 4» п = 6 - число всех исходов, т = 2 – благоприятствующих событию А (5, 6) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Ответ: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$

Опр. Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается A+B, A *или* B) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B, или оба одновременно.
Пример:
В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.
Решение:
A: взяли синий карандаш
B: взяли зеленый карандаш
C: взяли синий или зеленый карандаш
Событие C равно сумме событий A и B: C = A + B
Вероятность события A равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{7}{30}$
Вероятность события B равна $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{8}{30}$
Вероятность события C равна $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{30}+\frac{8}{30}=\frac{15}{30}=0{,}5$

Опр. Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается A×B, A и B) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события A и B вместе.
Пример:
В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
Решение:
A: из первой коробки вынули белый шар
B: из второй коробки вынули белый шар
C: из коробок вынули белые шары
Вероятность события A равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$
Вероятность события B равна $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$
Вероятность события C равна $P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\approx 0{,}083$
Ответ: P (C) ≈ 0,083

Классическая вероятность

В классической схеме вероятность любого события определяется как отношение числа m благоприятных для события A элементарных исходов к общему числу элементарных исходов n.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Пример 1:
Некто, перетасовывая колоду из 36 карт, извлекает оттуда случайным образом одну карту. Какова вероятность того, что это будет туз?
Решение:
Тузов всего 4. Это количество благоприятных исходов. Всего карт 36 - это количество всех исходов испытания. Искомая вероятность равна 4/36 = 1/9

Пример 2:
В конверте среди 25 карточек находится разыскиваемая карточка. Из конверта наудачу извлечено 6 карточек. Какова вероятность, что среди них окажется нужная карточка?
Решение:
Извлечь 6 карточек из 25 можно C^6_{25} способами. Это количество всех исходов. Подсчитаем количество благоприятных исходов. Если нужная карточка уже есть в наборе, то остальные пять карточек из 24 можно выбрать C^5_{24} способами.

$$P(A)=\frac{C^5_{24}}{C^6_{25}}=\frac{\frac{24!}{5!\,19!}}{\frac{25!}{6!\,19!}}=\frac{24!\,6!}{5!\,25!}=\frac{6}{25}=0,24$$

Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики

Пример: В партии из N = 10 деталей имеется L = 7 стандартных.
Наудачу отобраны k = 6 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно r = 4 стандартных.
Решение: Число n всех возможных элементарных исходов выбора равно числу способов, которыми можно извлечь k деталей из N деталей, т.е. $n = C_N^k$ – числу сочетаний из N элементов по k.

$$n = C_N^k = C_{10}^6 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$$

Подсчитаем число исходов, составляющих интересующее нас событие *A* – (среди k деталей ровно r стандартных). Из k стандартных деталей взять r стандартных деталей можно C_k^r способами, при этом остальные k – *r* деталей должны быть нестандартными; взять их из N – *L* нестандартных деталей можно C_{N-L}^{k-r} способами. Число m всех благоприятствующих A исходов равно произведению m = $C_k^r . C_{N-L}^{k-r}$.

$$m = C_k^r . C_{N-L}^{k-r} = C_7^4 . C_3^2 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1} = 105.$$

Вероятность события A равна отношению m – числа исходов, благоприятствующих событию A, к n – числу всех возможных элементарных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_k^r\cdot C_{N-L}^{k-r}}{C_N^k}\ \frac{105}{210} = 0,5.$$

Вычисление вероятностей независимых событий

Пример: для сообщения об аварии установлены два независимо работающих автомата – сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна p1 = 0,95, второй – p2 = 0,9. Найти вероятность события A – при аварии поступит сигнал хотя бы от одного сигнализатора.
Решение: Событие A может осуществиться, если произойдет одно из следующих событий: сработает первый сигнализатор и одновременно не сработает второй – $A1\cdot\bar{A}2$; сработает

второй сигнализатор и одновременно не сработает первый – $\bar{A}_1 A_2$; одновременно сработают оба сигнализатора – $A_1 A_2$, т.е. $A = A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2 + A_1 A_2$. Вероятности противоположных событий $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ соответственно равны $q_1 = 1 – p_1 = 0,05$ и $q_2 = 1 – p_2 = 0,1$. События, составляющие A, несовместны (не могут произойти одновременно), поэтому вероятность события A равна

$P(A) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(A_1 A_2) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2 = 0,995$.

2–й способ: Событие $\bar{A}$ противоположное A произойдет, если одновременно не сработают оба сигнализатора – $\bar{A}_1 \bar{A}_2$. Тогда вероятность события A равна

$P(A) = 1 – P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 – q_1 \cdot q_2 = 1 – 0,005 = 0,995$

Формула полной вероятности

<u>Пример</u>: за различными материалами послана автомашина наудачу на одну из трех баз. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй - 0,8, на третьей - 0,6. Найти вероятность того, что автомашина не привезет нужного материала.

<u>Решение</u>: для получения нужного материала необходимо выбрать одну из баз. События H_1, H_2, H_3 - взятие материала с определенных баз составляют полную группу событий, примем эти события за гипотезы, их вероятности равны $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$, т.к. гипотезы равновозможные. Условные вероятности события A – (нет нужного материала) соответственно равны $P(A|H_1) = 1 – 0,9 = 0,1$, $P(A|H_2) = 0,2$, $P(A|H_3) = 0,4$. Тогда по формуле полной вероятности получим

$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) = 0,175$.

Задания для практической работы

Найдите число размещений:

1) Из 10 элементов по 4
2) Из 9 элементов по 3
3) Из 8 элементов по 2
4) Из 11 элементов по 3
5) Из 7 элементов по 4

Вычислите значения выражений:

1. $\frac{10!-8!}{89}$
2. $6!(7!-3!)$
3. $\frac{37!}{35!}$
4. Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C – шесть. Сколько различных маршрутов из города A ведут в город C через город B?
5. В меню столовой имеется 5 первых, 7 вторых и 3 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд?
6. Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита (33 буквы) и четырех цифр. Сколько можно составить различных номеров автомашин?

7. Вычислить:

P_7 A_8^3 C_8^5

8. Сколькими способами можно выбрать для подарка 3 предмета из 9 предметов?
9. В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?
10. Сколькими разными способами можно разместить 6 групп школьников в 6 классных комнатах (по одной группе в комнате)?

Решить задачи:

1. Сколько трехбуквенных слов можно образовать из букв слова «АРБУЗ»?
2. Сколько различных слов, даже бессмысленных можно образовать, представляя буквы «АРБУЗ»?
3. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 2;4;6;7;9?
4. Сколько трехбуквенных слов можно образовать из букв слова «ПЕРСИК»?
5. Сколько различных слов, даже бессмысленных, можно образовать, представляя буквы «ПЕРСИК»?
6. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2;3;4;5;6?
7. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?
8. В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать?
9. В спортивной команде 9 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
10. Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях?
11. Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали?
12. В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?
13. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?
14. На доске написаны семь существительных, пять глаголов и два прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?
15. На полке лежит пять книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять из одной книги)?
16. У мамы два яблока и три груши. Каждый день, в течение пяти дней подряд, она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?
17. Найти количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7
18. Разложить по Биному Ньютона: $(2x + 1/3)^7$

Решить задачи:

1. Из 1000 ламп 380 принадлежит к 1 партии, 270 – ко 2-й, остальные – к 3-ей. В 1-ой партии 4% брака, во 2-ой – 3%, в 3-ей – 6%. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.
2. При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи, вследствие выхода из строя одного из 3-х последовательно соединенных элементов. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0.2, 0.3, 0.4.Определить вероятность того, что разрыва цепи не произойдет.
3. В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что 1-ый шар окажется черным, 2-ой – красным, 3-ий – белым.

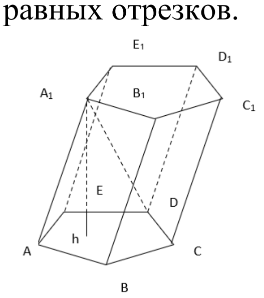
4. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно p_1, p_2, p_3. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для 1-ой кассы – p_4, для 2-ой – p_5, для 3-ей – p_6. Пассажир отправляется за билетом. Какова вероятность того, что он приобретет билет?
5. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10%. Составить закон распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года и найти числовые характеристики этого распределения.
6. Каждое из четырёх несовместных событий может произойти соответственно с вероятностью 0.12, 0.1, 0.05 и 0.03. Определить вероятность того, что в результате опыта:
а) произойдёт хотя бы одно из этих событий;
б) не произойдёт ни одно из этих событий.
7. В партии из 12 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Какова вероятность того, что из взятых наугад 4 изделий 2 изделия являются дефектными?
8. В магазин поступила новая продукция с трёх предприятий. Процентный состав этой продукции, следующий: 20% – продукция первого предприятия, 30% – продукция второго, 50% – продукция третьего. 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии – 5%, на третьем – 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.
9. Куб, все грани которого окрашены, разделили на 64 равных кубика. Найти вероятность того, что наудачу взятый кубик имеет 3 окрашенные грани.
10. В результате эксперимента получены следующие значения случайных величин: 3, 6, 8, 11, 6, 10, 7, 9, 7, 3, 4, 8, 2, 7, 9, 4, 9, 11, 7, 8, 4, 10, 5, 6, 7, 3, 10, 5, 2, 8.
По имеющимся данным составить таблицу распределения значений случайной величины: по частотам, по относительным частотам, по накопленным относительным частотам. Построить полигон относительных частот значений случайной величины и функцию распределения. Найти размах, моду, медиану и среднее выборки.

Раздел 13. Многогранники и тела вращения

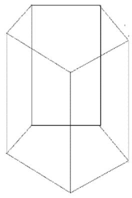
Цель работы: повторение и систематизация знаний

Многогранники
Призма

При изображении пространственных фигур необходимо соблюдать следующие требования.
1. Изображение должно быть наглядным. Призму надо изображать так, чтобы наибольшее число её граней были видимыми, чтобы не сливались рёбра.
2. Изображение должно быть простым, т.е. не должно содержать каких-либо построений, не имеющих прямого отношения к решению задачи. Видимые линии должны иметь наибольшую толщину, невидимые – изображать штриховыми линиями.
3. Выполнение чертежа призмы удобно начинать с верхнего основания, т.к. в верхнем основании все линии видимые, боковые рёбра изображаются в виде параллельных и равных отрезков.



ABCDE A_1 B_1 C_1 D_1 – наклонная призма.
ABCDE и A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 - основания призмы
ABB_1 A_1 ... - боковые грани (параллелограммы)
AA_1, BB_1, … - боковые рёбра
h - высота призмы
A_1 D – диагональ призмы



Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма является *прямой*. Высота прямой призмы равна её боковому ребру.
Прямая призма называется *правильной*, если её основания – правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани – равные прямоугольники.
Площадь полной поверхности призмы = сумме площади её боковой поверхности и двойной площади основания.
Площадь боковой поверхности произвольной призмы: S=P*l, где P — периметр перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра.
Площадь боковой поверхности прямой призмы: S=P*h, где P — периметр основания призмы, h — высота призмы.

Свойства правильной четырехугольной призмы

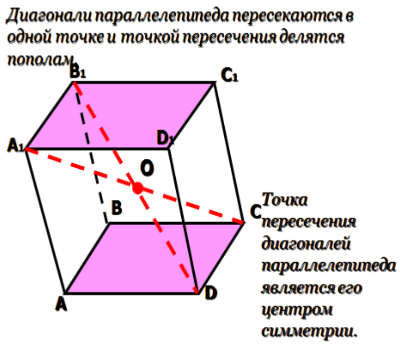
Основания правильной четырехугольной призмы – это 2 одинаковых квадрата
Верхнее и нижнее основания параллельны
Боковые грани имеют вид прямоугольников
Все боковые грани равны между собой
Боковые грани перпендикулярны основаниям
Боковые ребра параллельны между собой и равны
Перпендикулярное сечение перпендикулярно всем боковым ребрам и параллельно основаниям
Углы перпендикулярного сечения – прямые
Диагональное сечение правильной четырехугольной призмы является прямоугольником
Перпендикулярное (ортогональное сечение) параллельно основаниям

Формулы для правильной четырехугольной призмы

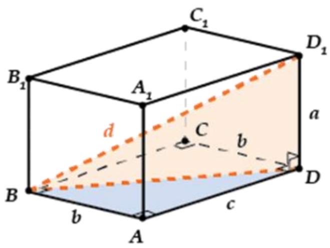
$$V = S_{осн} h = a^2 h$$
$$S_{бок} = Pl = 4al$$
$$S_{бок} = Ph = 4ah$$
$$S_{бок.сечения} = ah\sqrt{2} = al\sqrt{2}$$
$$S_{перп.сечения} = a^2$$

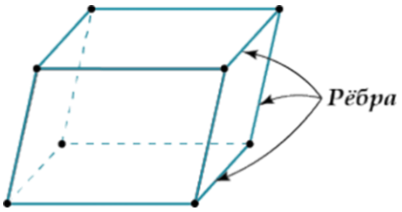
Параллелепипед

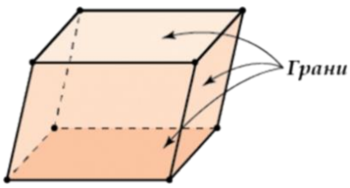
Если основание призмы есть параллелограмм, то он называется параллелепипедом.
У параллелепипеда все грани – параллелограммы
Параллелепипеды, как и призмы, могут быть прямыми и наклонными (параллелепипед называется прямым, если его ребра перпендикулярны основаниям, в противном случае параллелепипед называется наклонным)
Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими
У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны
Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам
Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии

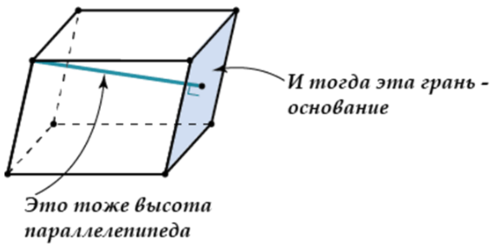


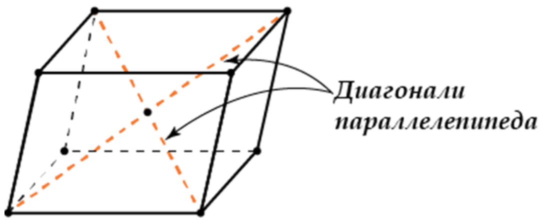
Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна сумме квадратов его измерений:
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

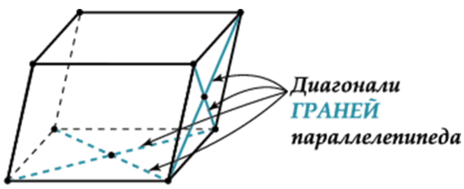


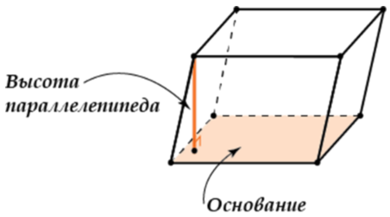






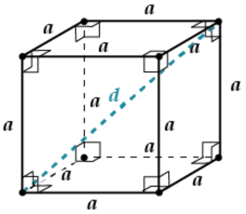






Куб

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны.



Пирамида

При изображении пространственных фигур необходимо соблюдать следующие требования.
1. Изображение должно быть наглядным. Пирамиду надо изображать так, чтобы наибольшее число её граней были видимыми, чтобы не сливались рёбра.
2. Изображение должно быть простым, т.е. не должно содержать каких-либо построений, не имеющих прямого отношения к решению задачи. Видимые линии должны иметь наибольшую толщину, невидимые – изображать штриховыми линиями.

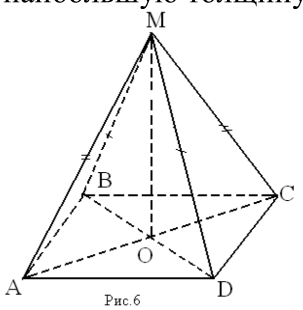
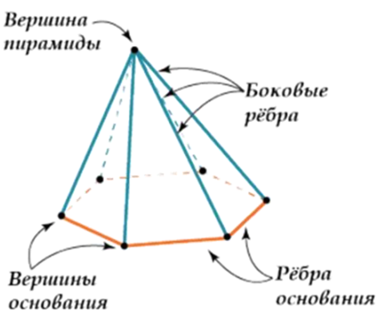
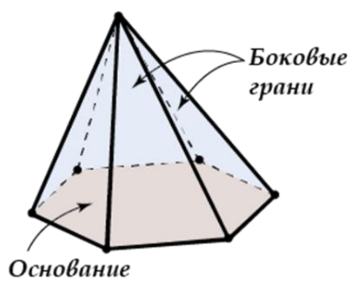
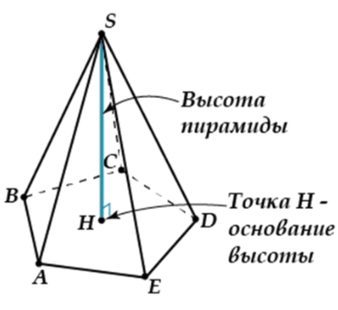


Рис.6

MABCD – четырёхугольная пирамида
M – вершина пирамиды,
ABCD - основание,
MAB, MBC, MCD, MAD – боковые грани
MA, MB, MC, MD - боковые рёбра
MO - высота
Пирамида называется *правильной*, если её основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её высотой. Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.







Свойства пирамиды

Если все боковые ребра равны, то:

- вокруг основания пирамиды можно описать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр
- боковые рёбра образуют с плоскостью основания равные углы
- также верно и обратное, то есть если боковые рёбра образуют с плоскостью основания равные углы, или если около основания пирамиды можно описать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр, то все боковые рёбра пирамиды равны

Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то:
- в основание пирамиды можно вписать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр
- высоты боковых граней равны
- площадь боковой поверхности равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани

Полная поверхность — это сумма площади боковой поверхности и площади основания: $S_{пп} = S_{бок} + S_{осн}$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды – это произведение половины периметра основания на апофему: $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} * h$

Тетраэдр

Тетраэдром называется треугольная пирамида. В тетраэдре любая из граней может быть принята за основание пирамиды. Правильная треугольная пирамида — это пирамида с правильным треугольником в основании (грани же должны быть равнобедренными треугольниками). Правильным тетраэдром является тетраэдр, у которого все грани являются равносторонними треугольниками.

Сечения многогранников

Для решения задач на построение сечений многогранника, надо знать основные понятия.

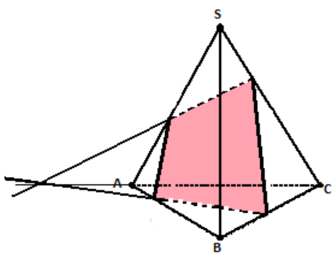
<u>Опр.</u>

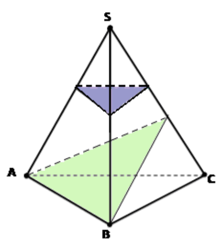
Секущей плоскостью называется любая плоскость, по обе стороны, от которой имеются точки данного многогранника.

Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам.

<u>Опр.</u>

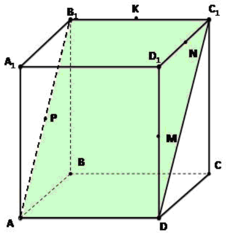
Многогранник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника. Так как *тетраэдр* имеет 4 грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырёхугольники.

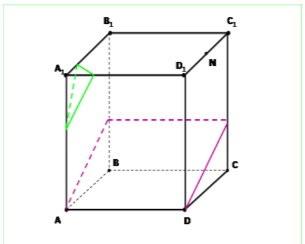


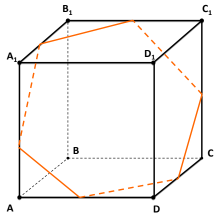


Параллелепипед имеет 6 граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники.

При построении сечений параллелепипеда следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны.





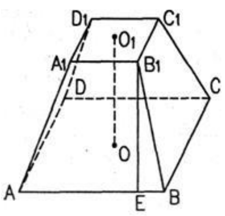


Усеченная пирамида

Итак, усечённой пирамидой называется многогранник, гранями которого являются многоугольники A^1 A^2… A^n и B^1 B^2… B^n (верхнее и нижнее основания), расположенных на параллельных плоскостях и четырёхугольников A^1 A^2 B^1 B^2, A^2 A^3 B^2 B^3,…A^{n-1} A^n B^{n-1} B^n (боковые ребра)
Отрезки, соединяющие вершины оснований называются боковыми ребрами усечённой пирамиды.

На чертеже изображена усечённая пирамида $ABCDA^1$ B^1 C^1 D^1.
Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведённый из любой точки основания к плоскости другого.
ABCD и A^1 B^1 C^1 D^1 –основания
А A^1B^1 В-боковая грань
А A^1-боковое ребро
OO^1-высота

Основания правильной усечённой пирамиды – это правильные многоугольники, а боковые грани – равнобедренные трапеции. Высота боковой грани называется апофемой.



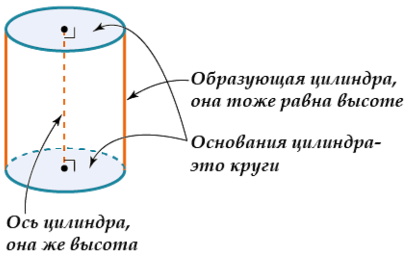
Площадь полной поверхности усеченной пирамиды – это сумма площадей двух оснований и площади боковой поверхности.
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды – это произведение апофемы по полусумму периметров.

Тела вращения

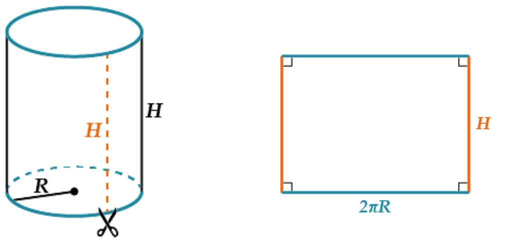
Тело вращения – это тело в пространстве, которое возникает при вращении какой-нибудь плоской фигуры вокруг какой-нибудь оси.

Цилиндр

Цилиндр – тело, образованное вращением прямоугольника вокруг одной из сторон.



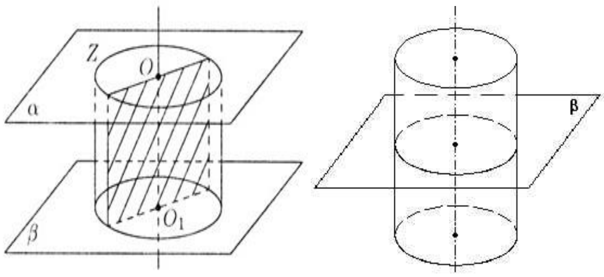
Развертка цилиндра



Площадь боковой поверхности цилиндра: Sбок. = $2\pi RH$
R – радиус
H – высота, она же образующая
Площадь полной поверхности цилиндра: Sполн. = $2\pi RH + 2\pi R^2$

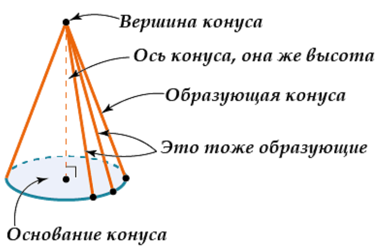
Сечения цилиндра

1) Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой *прямоугольник.* Сечения, параллельные оси цилиндра – прямоугольники.
2) Если же секущая плоскость параллельна основаниям, то сечением будет *окружность*.

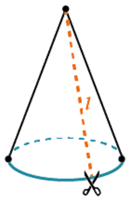


Конус

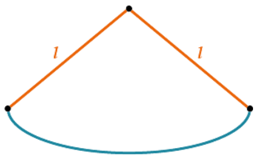
Конус – тело вращения, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.



Развертка конуса



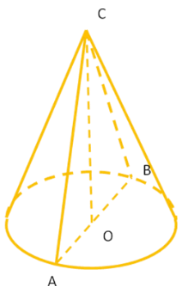
Развертка конуса – сектор круга радиуса l

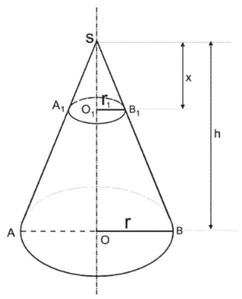


Площадь боковой поверхности конуса: $S_{бок.} = \pi Rl$
R — радиус окружности основания
l — длина образующей
Площадь полной поверхности конуса: $S_{полн.} = \pi Rl + \pi R^2$

Сечения конуса

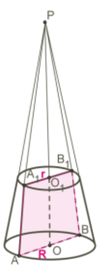
1) Осевое сечение конуса – это всегда равнобедренный треугольник.
2) Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковая поверхность – по окружности с центром на оси конуса.



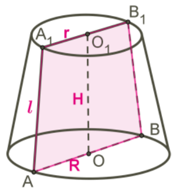


Усеченный конус

Если провести сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, то эта плоскость разбивает конус на две части, одна из которых — конус, а другую часть называют усечённым конусом.



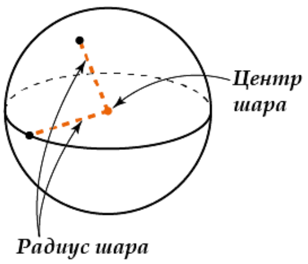
Также усечённый конус можно рассматривать как тело вращения, которое образовалось в результате вращения прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны (которая перпендикулярна к основанию трапеции) или в результате вращения равнобедренной трапеции вокруг высоты, проведённой через серединные точки оснований трапеции.

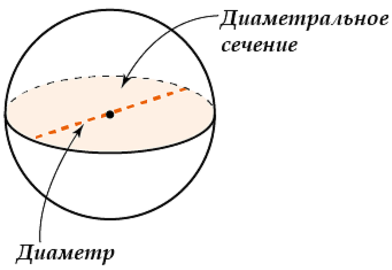


OO1 — ось конуса и высота конуса.
AA1 — образующая конуса.
Круги с центрами O и O1 — основания усечённого конуса.
AO и A1O1 — радиусы оснований конуса.
Осевое сечение конуса — это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось OO1 конуса.
Осевое сечение конуса — это равнобедренная трапеция.
AA1B1B — осевое сечение конуса.
Боковая поверхность определяется как разность боковой поверхности данного конуса и отсечённого конуса:
Sбок. = πR·PA−πr·PA1 = πR·(PA1+AA1) − πr·PA1 = πR·PA1 + πR·AA1 − πr·PA1 = πR·l + (πR−πr) ·PA1
Так как ΔPAO~ΔPA1O1, то стороны их пропорциональны:
PAPA1=Rrl+PA1PA1=Rrr·(l+PA1) =R·PA1rl=R·PA1−r·PA1PA1·(R−r) =rlPA1=rlR−r
Таким образом, получаем формулу боковой поверхности усечённого конуса, которая содержит радиусы оснований и образующую усечённого конуса:
Sбок. = πRl+π·PA1·(R−r) = πRl+π·rlR−r·(R−r)
Sбок. = πRl+πrl = πl·(R+r)

Шар

Шар – тело вращения, полученное вращением полуокружности вокруг диаметра.
Шар – геометрическое место точек, удаленных от одной фиксированной точки на расстояние, не более заданного.



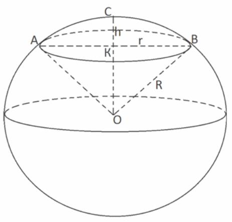


Диаметральное сечение шара – сечение, проходящее через центр. Это сечение иногда еще называют большим кругом.
Любое сечение шара – круг.
Граница шара называется сфера. (Так же, как граница круга – окружность)

Площадь поверхности сферы: $S_{пов}=4\pi R^2$
R – радиус

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.
Шаровым слоем называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.
Шаровой сектор получается из шарового сегмента и конуса.

Если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то указанный конус из него удаляется.



Основные формулы

Шар (R = OB — радиус): $S_б = 4\pi R^2$
Шаровой сегмент (R = OB — радиус шара, h = CK — высота сегмента, r = KB — радиус основания сегмента): $S_{сегм} = 2\pi Rh$
Шаровой слой (R_1 и R_2 — радиусы оснований шарового слоя; h = CK — высота шарового слоя или расстояние между основаниями): $S_{ш/сл} = 2\pi Rh$

Объемы тел

<u>Объём куба</u> вычисляется по формуле: $V = a^3$, где a – ребро куба.

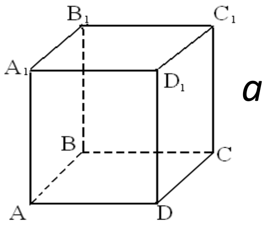
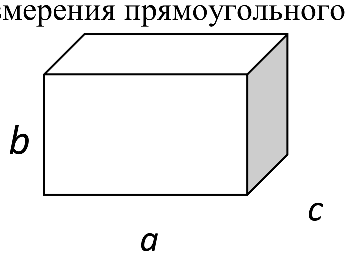
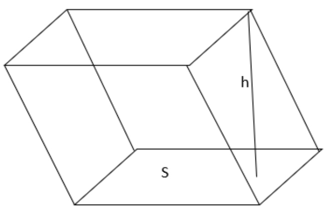


Рис.1

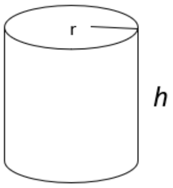
<u>Объём прямоугольного параллелепипеда</u> вычисляется по формуле: V=abc, где a, b, c – измерения прямоугольного параллелепипеда (длина, ширина, высота)



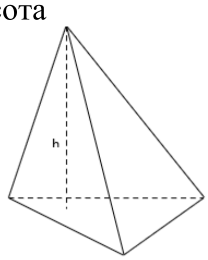
<u>Объём призмы</u> равен $V = S_{осн} \cdot h$



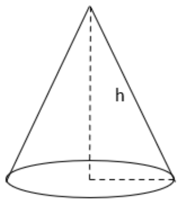
<u>Объём цилиндра</u> вычисляется по формуле: $V = S_{осн} \cdot h = \pi r^2 h$



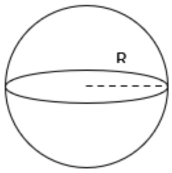
<u>Объём пирамиды</u> вычисляется по формуле: $V = \frac{1}{3} S\ h$, где S – площадь основания, h - высота



<u>Объём конуса</u> вычисляется по формуле: $V = \frac{1}{3} S\ h$, где S – площадь основания, h – высота

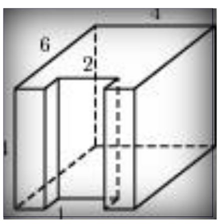


<u>Объём шара</u> равен: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

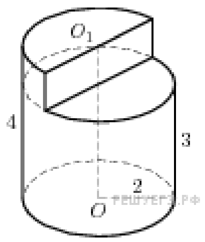


Задания для практической работы

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $D_1B = \sqrt{26}$, $BB_1 = 3$, $A_1D_1 = 4$. Найдите длину ребра A_1B_1.
2. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O – центр основания, S – вершина, SO = 10, BD = 48. Найдите боковое ребро SA.
3. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 42, боковые ребра равны 75. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.
4. В правильной треугольной пирамиде SABC M – середина ребра AB, S – вершина, BC = 4, SM = 3. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
5. Площадь поверхности куба равна 200. Найдите его диагональ.
6. Если каждое ребро куба увеличить на 9, то его площадь поверхности увеличится на 594. Найти ребро куба.
7. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 32 и 42. Площадь поверхности параллелепипеда равна 6240. Найдите его диагональ.
8. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 9 и 40, и боковым ребром, равным 55.
9. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

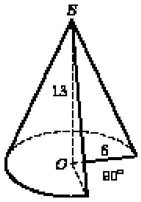


10. На заводе игрушек выпускают наборы кубиков. В набор входит по 10 кубиков красного, зеленого, синего и желтого цвета. Сколько пластмассы каждого цвета понадобиться для одного такого набора, если ребро кубика 10 см?
11. Коллекционер заказал аквариум, имеющий форму правильной шестиугольной призмы. Сколько квадратных метров стекла необходимо для изготовления аквариума, если сторона основания 0,5 м, а высота 1,2 м? Ответ округлите до сотых.
12. На даче нужно покрасить с внешней и внутренней стороны бак с крышкой для воды. Бак имеет форму прямой призмы высотой 1,5 м. В основании призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 0,6 м и 0,8 м. В магазине имеется краска в банках по 1 кг и 2,5 кг. Сколько и каких по массе банок краски надо купить для покраски бака, если на 1 квадратный метр расходуется 0,2 кг краски?
13. На заводе выпускают подарочные коробки в виде прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 24 см и 10 см. Площадь полной поверхности призмы равна 760 кв.см. Какой будет высота этой коробки?
14. Необходимо изготовить короб с крышкой для хранения картофеля в форме прямой призмы высотой 0,7 м. В основании призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 0,4 м и 0,6 м и боковой стороной 0,5 м. Сколько фанеры понадобиться для изготовления короба? Ответ округлите до целого числа.
15. В цилиндре проведена секущая плоскость, параллельно его оси на расстоянии 4 см от нее. Плоскость отсекает от основания дугу в 60 градусов. Найти площадь сечения, если высота цилиндра равна 20 см.
16. Площадь осевого сечения равностороннего конуса равна 123. Найти площадь его полной поверхности.
17. Ребро куба равно 9. Найти радиусы вписанной в него и описанной около него сферы.
18. Найти площадь поверхности тела

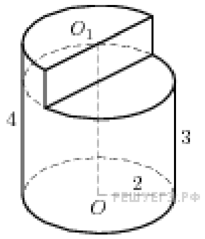


19. Сфера проходит через точку (0;-3;-7), а ее центр находится в начале координат. Составьте уравнение сферы.
20. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.
21. Найти объём прямоугольного параллелепипеда, у которого стороны основания равны 12 см и 16 см, а диагональ параллелепипеда составляет 45^{o} с плоскостью основания.
22. Основанием прямой призмы является ромб со стороной 6 см и острым углом в 60^{o}. Меньшее из диагональных сечений является квадратом. Найти объём призмы.
23. Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого – квадрат. Найти отношение объёмов шара и цилиндра.
24. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и катетом 6 см. Больший катет треугольника в основании призмы равен диагонали меньшей из боковых граней. Найти объём призмы.
25. Объем конуса равен 96. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.
26. Высота конуса равна 12, образующая равна 14. Найдите его объем, деленный на π.

27. Найдите объем V конуса, образующая которого равна 3 и наклонена к плоскости основания под углом 30. В ответе укажите V/π.
28. Найдите объём части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



29. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 4 см и составляет с плоскостью боковой грани угол 30º. Найдите объём призмы.
30. Основанием прямой призмы является ромб со стороной 12 см и острым углом в 60º. Меньшее из диагональных сечений является квадратом. Найти объём призмы.
31. В куб вписан шар. Найдите отношение объёмов куба и шара.
32. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и катетом 6 см. Больший катет треугольника в основании призмы равен диагонали меньшей из боковых граней. Найти объём призмы.
33. Найти объем тела



34. Объем конуса равен 48. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.
35. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 18.
36. Бетонный шар весит 0,5 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

Раздел 14. Уравнения и неравенства

Цель работы: повторение и систематизация знаний

Задания для практической работы

1. Решить уравнения и неравенства графическим методом

$3x-4=1-5x.$

$2-7x=x+4$

$7x-5<3+x.$

$3-11x>5x+2$

$$\begin{cases}5x-3>1-2x,\\3x+4<x+1.\end{cases}$$

$x^2-10x+21=0$

$x^2-8x+13=0$

$x^2 - 11x + 24 > 0$

$-x^2 - 14x - 48 > 0$

$2 - x^2 = \sqrt{x}$

$\begin{cases} x^2 = y + 4|x| - 4 \\ y + 3 = ||x| - 3|. \end{cases}$

$\frac{2}{x} = x^2 + 1$

2. Решить уравнения и неравенства с модулем:

$|x - 5| = 5$

$|x - 3| = 0$

$|2x - 10| = -8$

$|x^2 - 4x - 20| = 1$

$|2x + 4| = |x + 8|$

$|x - 1| - |x + 1| + |x + 4| = 3$

$|2 - x| < 1$

$|3x - 2| \geq 4$

$|5x - 3| > -2$

$x^2 - 2|x| < 3$

$|13 - 2x| \geq |4x - 9|$

$1 < |3x - 8| < 5$