

Курс лекций  
с методическими рекомендациями  
по решению практических задач

ЧАСТЬ III «Статика сооружений»

2. По виду элементов, образующих сооружений:

а) стержневые сооружения- сооружения, состоящие из стержней: балки, фермы, рамы, арки:

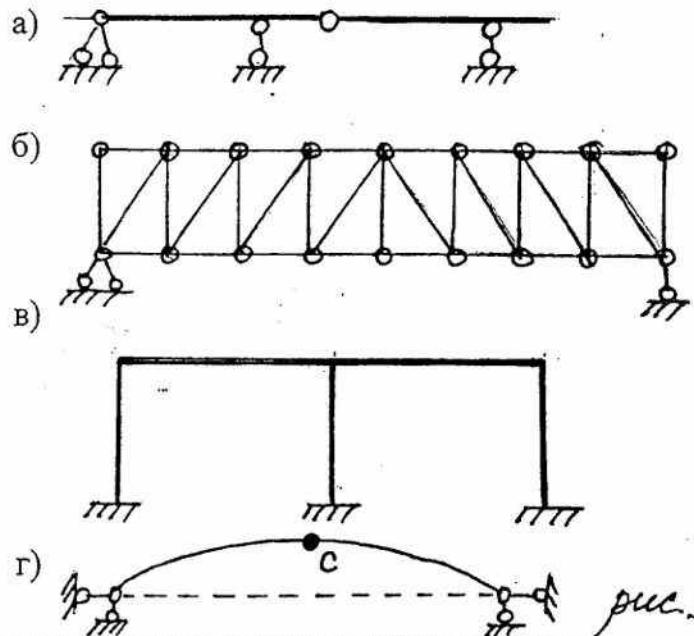


рис.3

б) тонкостенные сооружения- элементы, толщина которых много меньше остальных размеров.

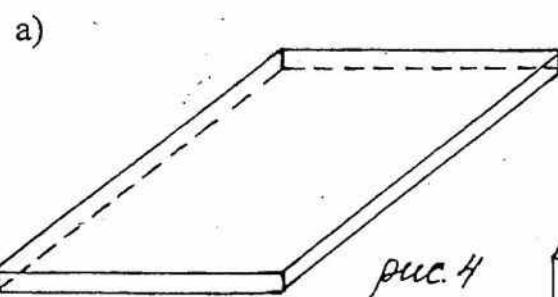
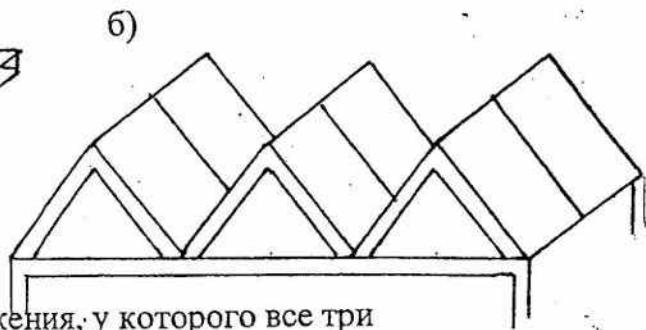
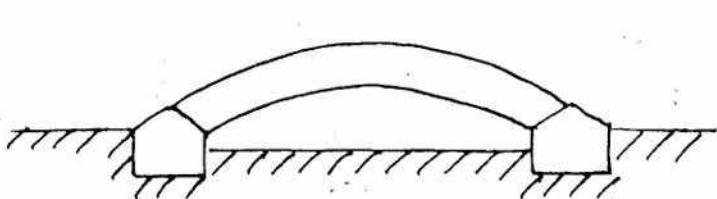


рис.4



в) Массивные сооружения- сооружения, у которого все три измерения одного порядка:

а)



б)

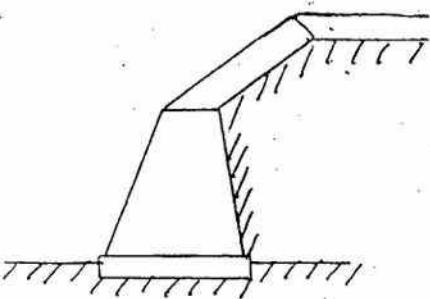


рис.5.

## ТЕМА 1. Основные понятия и расчётные схемы сооружений.

### 1.1. Основные понятия.

Статикой сооружений называется раздел строительной механики, изучающей методы расчёта сооружений на прочность, жёсткость и устойчивость при статическом действии нагрузки.

Сооружения это совокупность элементов, неподвижно соединенных между собой.

Статика сооружений использует методы теоретической механики и сопротивления материалов при расчетах сооружений и служит базой для изучения последующих инженерно-строительных дисциплин.

Основными задачами статики сооружений являются следующие:

1. Установление законов образования наивыгоднейших форм сооружений.
2. Определение внутренних усилий во всех элементах сооружений.
3. Изучение упругих перемещений, возникающих в сооружении под влиянием внешних воздействий.
4. Исследование устойчивости сооружений.

### 1.2. Расчетные схемы. Их классификация.

Расчетная схема представляет собой упрощенное изображение действительного сооружения.

В расчетной схеме учитываются основные свойства, определяющие поведение сооружения под нагрузками.

Сооружения и их расчетные схемы можно классифицировать по следующим признакам:

1. В зависимости от расположения осей элементов и нагрузок:

а) плоские сооружения:

- оси элементов и нагрузки расположены в одной плоскости:

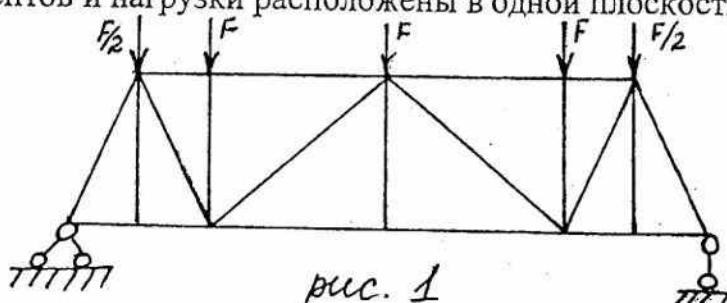
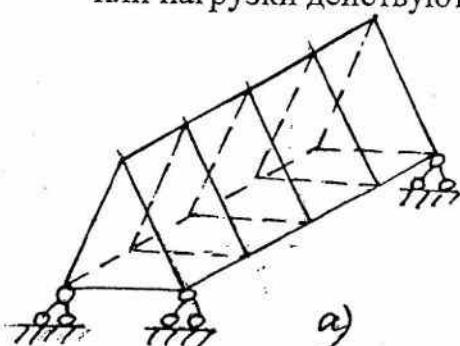
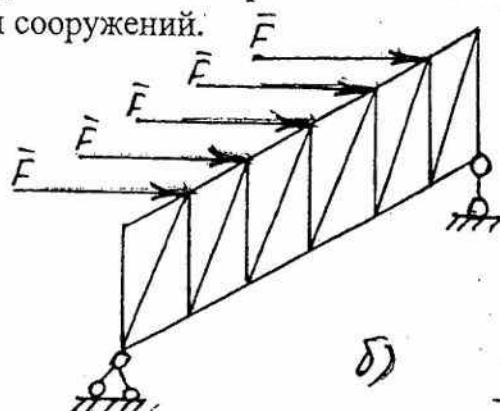


рис. 1

- б) пространственные – оси элементов расположены в разных плоскостях или нагрузки действуют не в плоскости сооружений.



а)



б)

рис. 2.

## ТЕМА 2. Кинематический анализ плоских стержневых сооружений.

### 2.1. Геометрически изменяемые и неизменяемые сооружения.

Геометрически изменяемой системой (или просто изменяемой) называют такую, форма которой изменяется под действием любой внешней силы, без наличия деформаций в элементах формы (рис.8).

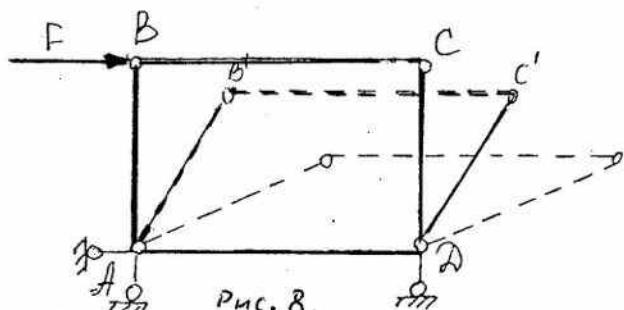


рис. 8

Геометрически неизменяемой системой (или просто неизменяемой) называется система, которая под действием внешних сил не изменяет своей геометрической формы без наличия деформации в ее элементах. (рис.9 а, б).

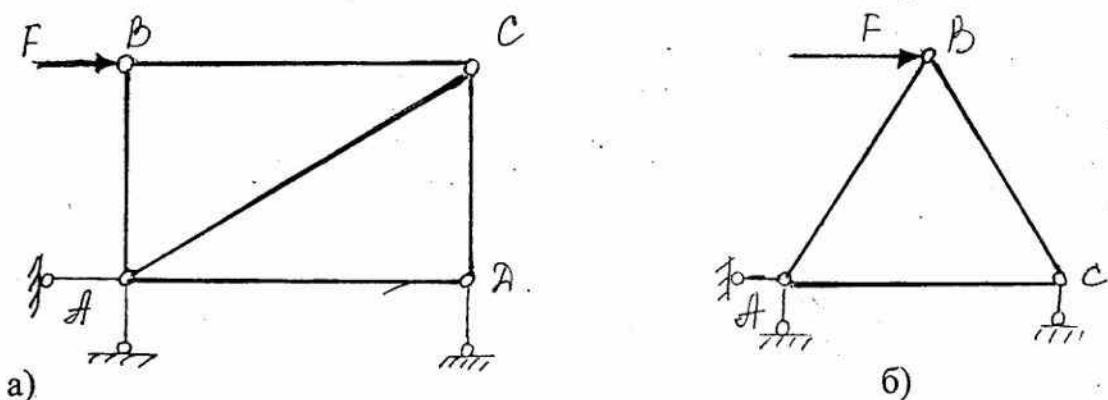


рис. 9.

В строительстве применяются только геометрически неизменяемые системы.

### 2.2. Кинематический анализ сооружений.

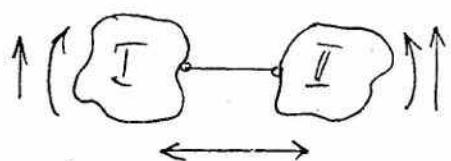
Показателем изменяемости структуры и положения сооружения является его степень свободы (возможные перемещения в плоскости).

Диск – свободный элемент сооружения (стержень).

Диск в плоскости имеет три степени свободы: вертикальное перемещение; горизонтальное и вращение.

В сооружении диски соединяются между собой тремя видами связей.

1. Шарнирный стержень – ограничивает одну степень свободы перемещения

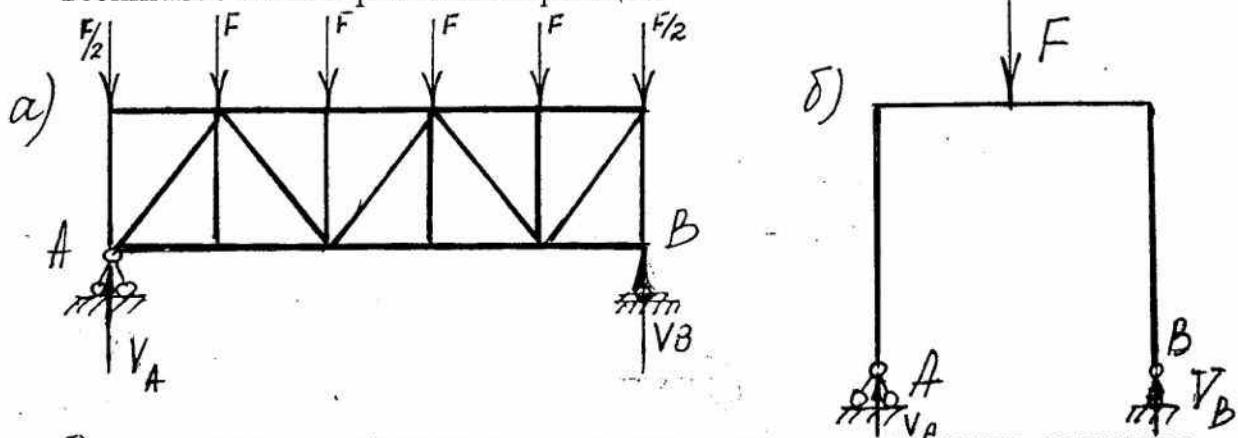


### НАПРИМЕР:

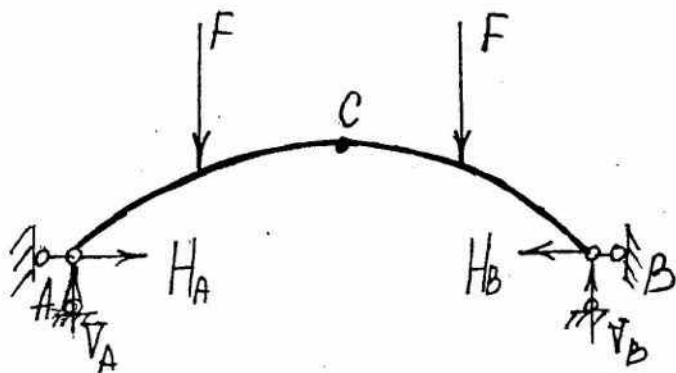
К массивным сооружениям (массивы) относятся: каменные своды (рис.5а), подпорные стены (рис.5б), платины, фундаменты и т.д.

3. В зависимости от направления опорных реакций различают:

а) **безраспорные сооружения**, у которых при вертикальных нагрузках возникают лишь вертикальные реакции.



б) **распорные сооружения**, у которых при вертикальных нагрузках возникают и вертикальные и горизонтальные реакции.

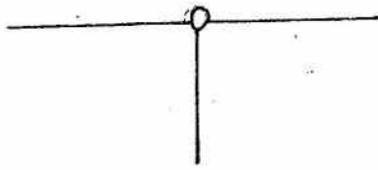


Такие горизонтальные реакции ( $H_A; H_B$ ) называются *распорами*.

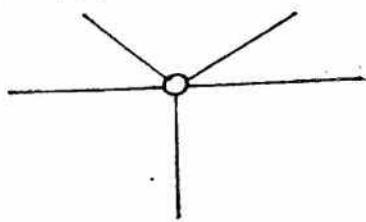
3. По методам расчета:

- статически определимые сооружения** – для расчета достаточно только уравнений равновесия статики.
- статически неопределимые сооружения** – расчет ведется с использованием дополнительных уравнений, учитывающих деформацию сооружений.

Кратные шарниры соединяют в узел более двух дисков.



три диска



пять дисков

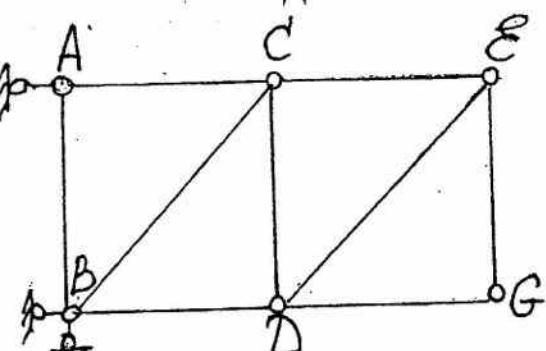
При расчете систем необходимо кратные шарниры привести к простой по формуле.

$$(2) \quad III = D - 1$$

где III – кол-во простых шарниров,

$D$  – кол-во дисков, входящих в узел.

ПРИМЕР:



$$\begin{aligned} D &= 9 \\ J &= 0 \\ III &= 12 \\ C_{op} &= 3 \end{aligned}$$

- узел А – 1 простой шарнир
- В – 2 простых шарнира
- С – 3 простых шарнира
- Д – 3 простых шарнира
- Е – 2 простых шарнира
- Г - 1 простой шарнир

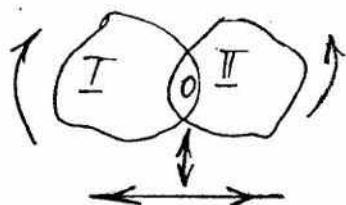
$$W = 3 \times 9 - 2 \times 12 - 3 = 27 - 24 - 3 = 0$$

Система геометрически неизменяемая и статически определима.

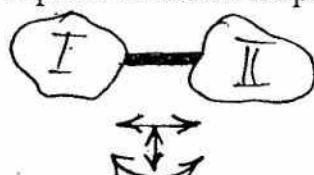
2.3. Мгновенно изменяемые системы.

Тему рассмотреть самостоятельно по учебнику : 1) Техническая механика" Л.П. Портаев, А.А. Петраков (М.Стройиздат. 1987 № 27.3, стр.-303-306); "Статика сооружений" И.В. Мухин, А.И. Першин (М.Высшая школа. 1980, №2.2 стр.23-25).

2. Простой цилиндрический шарнир - ограничивает две степени свободы перемещения (вертикальную и горизонтальную).



3. Жёсткая связь - ограничивает три степени свободы перемещения (вертикальное, горизонтальное и вращение).



Формула для определения степени подвижности плоского сооружения:

$$W = 3D - 3J - 2W - C_{op}$$

(1)

где:  $D$  - кол-во дисков

$J$  - кол-во жестких связей

$W$  - кол-во простых цилиндрических шарниров

$C_{op}$  - кол-во шарнирных стержней.

Цифры: 3, 2, 1 - показывают степени подвижности.

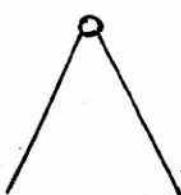
При 1)  $W > 0$  - система геометрически изменяемая (не имеет необходимого кол-ва связей)

2)  $W = 0$  - система геометрически неизменяемая (имеет необходимое кол-во связей) и статически определима.

3)  $W < 0$  - система геометрически неизменяемая, но статически неопределенная (имеет избыточное кол-во связей).

При анализе геометрической структуры сооружения необходимо различать простые шарниры и кратные.

Простые шарниры соединяют в узел не более двух дисков.



### 3.2. Виды многопролетных промежуточных шарниров.

1. Если балка начинается с шарнирной опоры (неподвижной) в первом пролете, как правило, шарниры не ставят, если балка начинается с жесткой заделки в первом пролете могут быть один или два шарнира.
2. В пролете могут быть не более двух шарниров.
3. Пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим.
4. Пролеты с двумя шарнирами могут следовать через один.
5. В последнем пролете только один шарнир.

### 3.3. Расчет балок.

Расчет многопролетной шарнирной балки необходимо начинать с построения поэтажной схемы (схема взаимодействия элементов балки).

#### ПОЭТАЖНЫЕ СХЕМЫ.

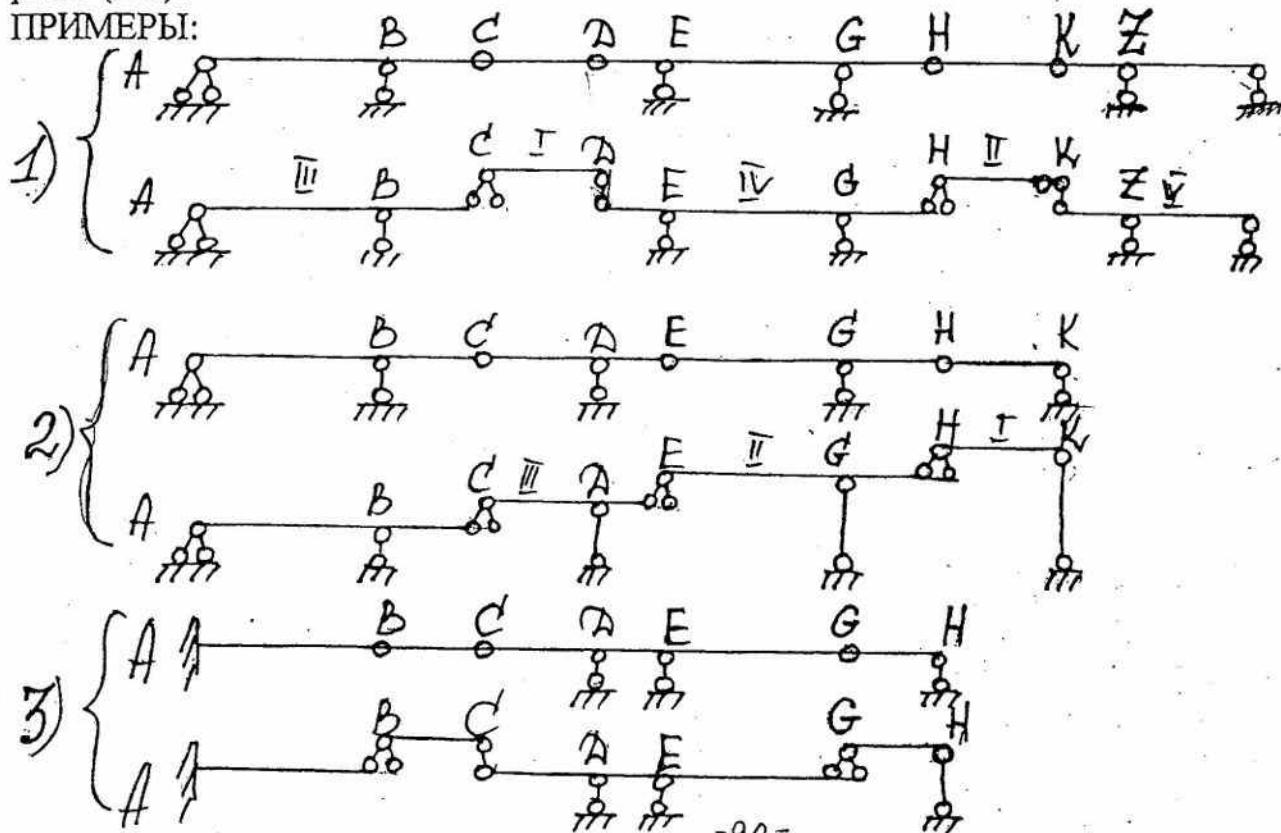
Построение начинают с основных элементов балки.

Основные элементы – балка, которая двумя вертикальными опорными стержнями прикреплена к земле или имеет жесткую заделку. (рис.1 (AB; EG), рис.2 (AB), рис.3 (A; DE)).

Далее устанавливают передаточные элементы, которые имеют одинаковый вертикальный опорный стержень и одним шарниром опираются на косоль соседнего элемента. (рис.2 (CD, EG HK); рис.3(GH)).

Последними устанавливают подвесные элементы, которые двумя шарнирами опираются на консоли соседних элементов (рис.1 (CD, HK); рис.3 (BG)).

ПРИМЕРЫ:



## ТЕМА 3. Многопролетные статически определимые (шарнирные) балки.

### 3.1. Общие сведения.

Многопролетная статически определимая (шарнирная) балка представляет собой несколько простых балок, которые соединены между собой шарнирами.

В сравнении с простыми и неразрезными балками шарнирные балки имеют следующие преимущества:

1. Уменьшается величина максимальных изгибающих моментов в пролетах балки, в результате чего требуют меньшего расхода материала.
2. Отсутствуют дополнительные напряжения от теплового воздействия и от осадки. опорных закреплений.

Недостатки : 1. Меньшая жесткость и надежность, так как разрушение одного пролета может вызвать обрушение других пролетов.

2. Наличие промежуточных шарниров требует некоторых дополнительных затрат.

Многопролетную шарнирную балку можно получить из неразрезанной балки.

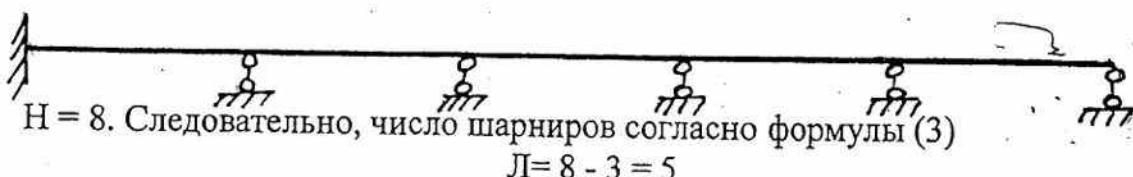
Необходимое число шарниров "Л" определяется по формуле:

$$L = H - Y \quad (3)$$

где: H- число неизвестных опорных реакций

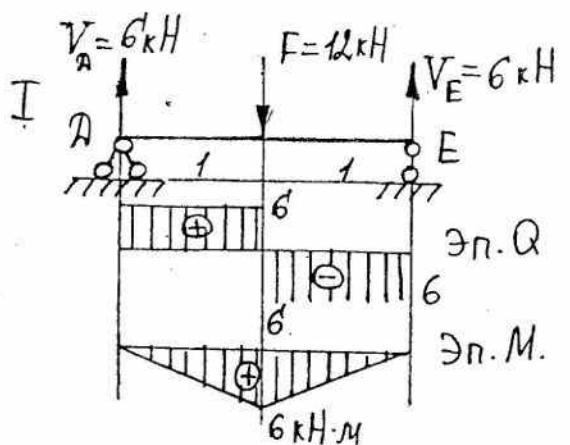
Y- число уравнений равновесия статики, Y = 3.

НАПРИМЕР: Даны неразрезная балка.



Многопролетная шарнирная балка.

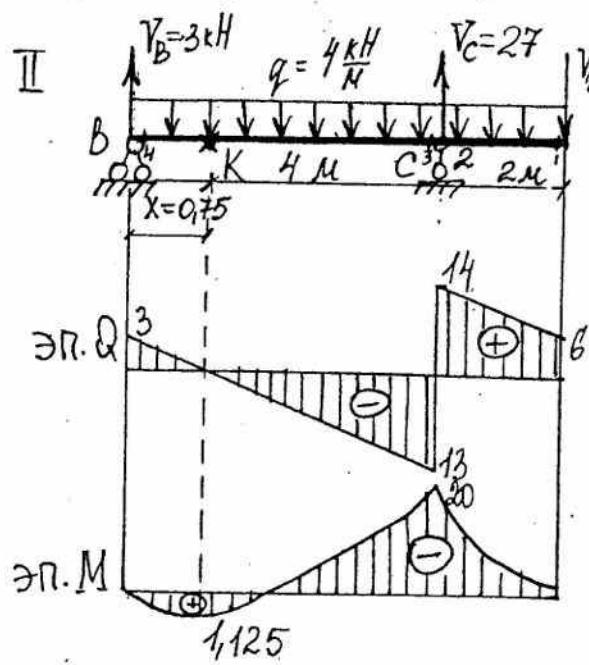




$$V_E = V_A = \frac{F}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ kN}$$

II. На балку ВС кроме распределенной нагрузки действует усилие передаваемое балкой ДЕ, опорным усилием  $V_B$ .

Примечание: при переносе опорных усилий с одного элемента на другое направление необходимо поменять на противоположное.



$$\sum M_B = (q \cdot 6) \cdot 3 + V_A \cdot 6 - V_C \cdot 2 = 0$$

$$V_C = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot 6}{4} = \frac{108}{4} = 27 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = V_A \cdot 2 + (q \cdot 2) \cdot 1 - (q \cdot 4) \cdot 2 + V_B \cdot 4 = 0$$

$$V_B = \frac{-6 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 3 \text{ kN}$$

ПРОВЕРКА:

$$\sum F_y = V_B + V_C - V_A - q \cdot 6 = 3 + 27 - 6 - 24 = 0$$

$$Q_1 = V_A = 6; Q_2 = V_A + (q \cdot 2) = 6 + 4 \cdot 2 = 14 \text{ kN}$$

$$Q_3 = V_A + (q \cdot 2) - V_C = 6 + 8 - 27 = -13 \text{ kN}; Q_4 = V_B = 3 \text{ kN}$$

$$M_1 = 0; M_2 = -V_A \cdot 2 - (q \cdot 2) \cdot 1 = -6 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = M_2 = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}; M_4 = 0 (V_B \cdot 0)$$

$$Q_k = V_B - q \cdot x = 0; x = \frac{V_B}{q} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ m}$$

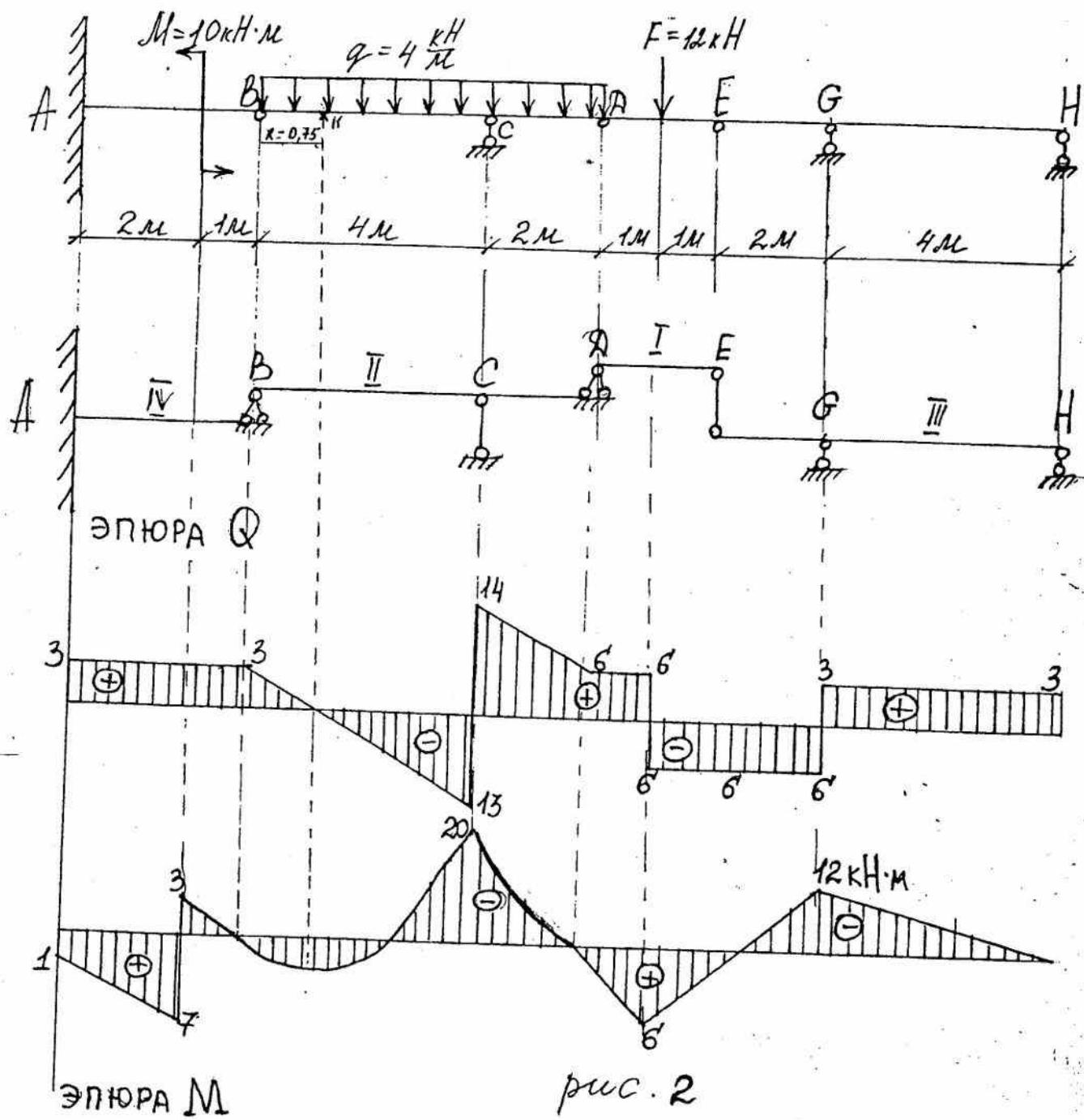
$$M_k = V_B \cdot 0,75 - (q \cdot 0,75) \cdot \frac{0,75}{2} = 3 \cdot 0,75 - 4 \cdot 0,75 \cdot \frac{0,75}{2} =$$

$$= 2,25 - 1,125 = 1,125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- рис.1 –балка с подвесными элементами;  
 рис.2 –балка с передаточными элементами;  
 рис.3 – комбинированная балка.

Далее, согласно очередности, рассчитать каждую отдельную балку, то есть, определить поперечные силы и изгибающие моменты и построить ЭПЮРЫ  $Q$  и  $M$  ( по правилам сопромата).

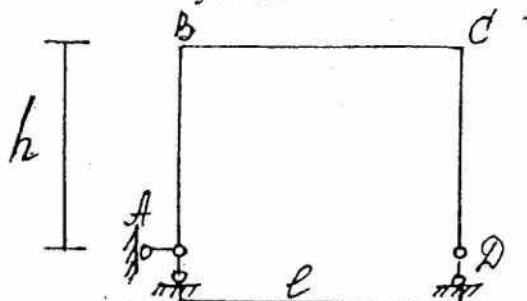
ПРИМЕР РАСЧЕТА:



## ТЕМА 4. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ПЛОСКИЕ РАМЫ.

### 4.1. Общие сведения.

Рамами называются геометрически неизменяемые стержневые системы стержни которых жестко связаны между собой во всех или нескольких узлах.



BC – ригель рамы.

AB, DC – стойки рамы.

h- высота рамы.

l- пролет рамы.

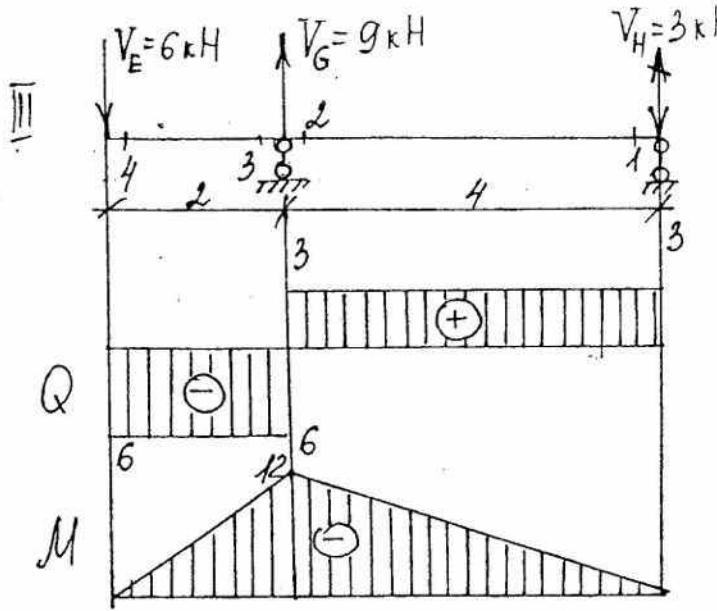
Типы рамных конструкций и их расчетные схемы рассмотреть по учебникам: "Статика сооружений" – Н.В. Мухин, А.И., А.И. Першин, М.Высшая школа. 1980. "Техническая механика" Л.П. Портаев, А.А. Петраков. М.Стройиздат, 1987.

4.2. Аналитический расчет рам заключается в определении трех внутренних силовых факторов от внешних нагрузок: продольных сил N; поперечных сил Q и изгибающим моментом M и построении их эпюров.

### АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА.

1. Провести анализ геометрической структуры.
2. Определить опорные реакции, сделать проверку.
3. Отметить характерные точки (сечения) в которых определить внутренние усилия : N, Q и M.
4. Построить эпюры N, Q : M.
  - а) при построении эпюр N и Q *отрицательные* значения откладывать внутри контура рамы, *положительные* снаружи.
  - б) при построении эпюры M – внутри контура рамы – *положительное значение*, снаружи – *отрицательное*.
5. Сделать проверку расчета по равновесию узлов:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M(.) = 0 \end{cases}$$



$$\sum M_H = V_G \cdot 4 - V_E \cdot 6 = 0$$

$$V_G = \frac{V_E \cdot 6}{4} = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9 \text{ kN}$$

$$\sum M_G = -V_E \cdot 2 - V_H \cdot 4 = 0$$

$$V_H = -\frac{V_E \cdot 2}{4} = -\frac{6 \cdot 2}{4} = -3 \text{ kN}$$

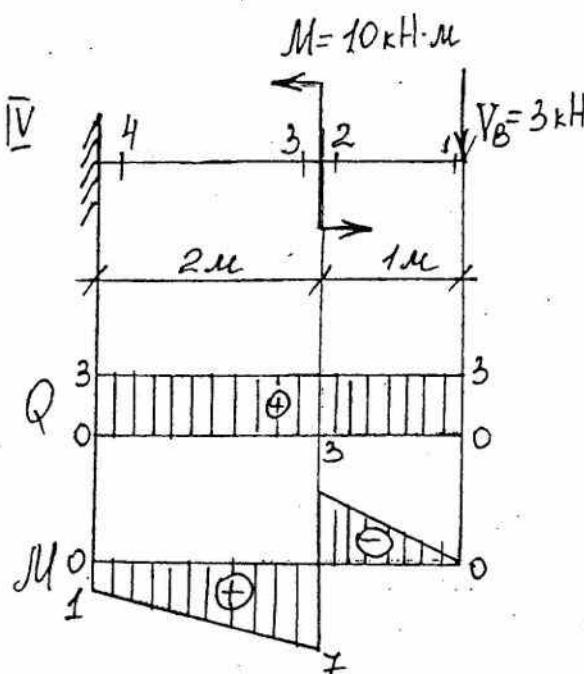
ПРОВЕРКА:

$$\sum F_y = -V_E + V_G - V_H = -6 + 9 - 3 = 0$$

$$Q_1 = Q_2 = V_H = 3 \text{ kN}; Q_4 = Q_3 = -V_E = -6 \text{ kN}$$

$$M_1 = 0; M_2 = -V_H \cdot 4 = -3 \cdot 4 = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_3 = M_2 = -12 \text{ kN}\cdot\text{m}; M_4 = 0$$



$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = V_B = 3 \text{ kN}$$

$$M_1 = 0; M_2 = -V_B \cdot 1 = -3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_3 = -V_B \cdot 1 + M = -3 + 10 = 7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

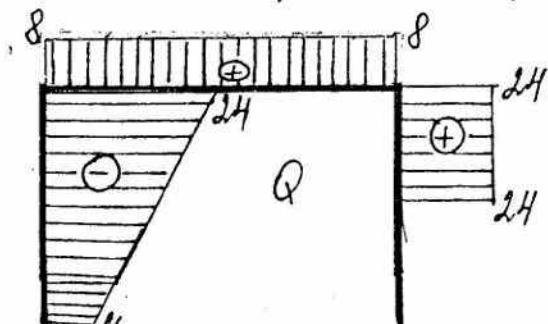
$$M_4 = -V_B \cdot 3 + M = -3 \cdot 3 + 10 = -9 + 10 = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Построить общие эпюры Q и M. (см.рис.2).

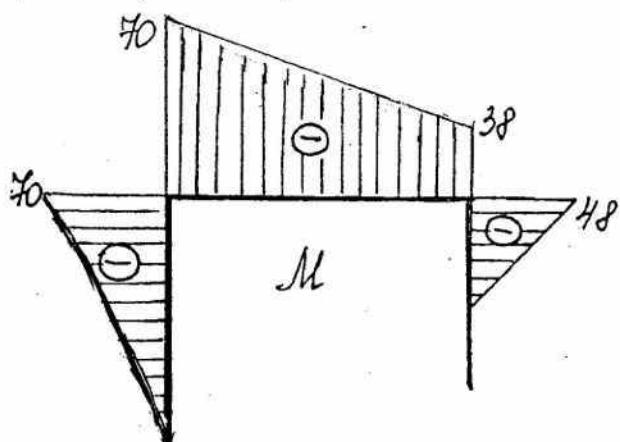
4) эпюра поперечных сил  $Q$ .

$$Q_1 = Q_2 = 0; Q_3 = Q_4 = F = 24 \text{ кН}; Q_5 = Q_6 = V_B = 8 \text{ кН}$$

$$Q_7^1 = -H_A = -4 \text{ кН}; Q_7^2 = -H_A - (q \cdot 5) = -4 - (4 \cdot 5) = -24 \text{ кН}$$

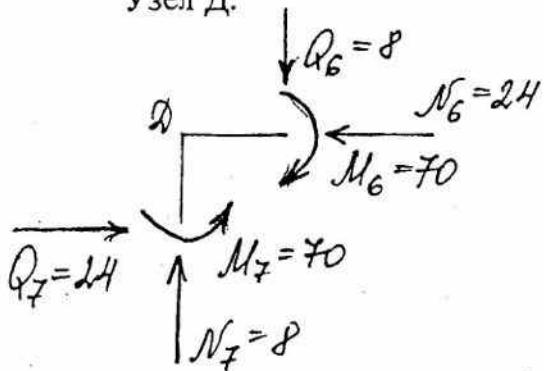


5. Эпюра изгибающих моментов  $M$ .



6. Проверка.

Узел Д.



$$M_1 = 0; M_2 = 0; M_3 = 0;$$

$$M_4 = -F \cdot 2 = -24 \cdot 2 = -48 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = -F \cdot 2 + M = -24 \cdot 2 + 10 = -38 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_6 = -V_B \cdot 4 - F \cdot 2 + M =$$

$$= -8 \cdot 4 - 24 \cdot 2 + 10 = -32 - 48 + 10 = -70 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_7^1 = -H_A \cdot 5 - (q \cdot 5) \cdot 2,5 =$$

$$= -4 \cdot 5 - (4 \cdot 5) \cdot 2,5 = -20 - 50 = -70 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_7^2 = 0$$

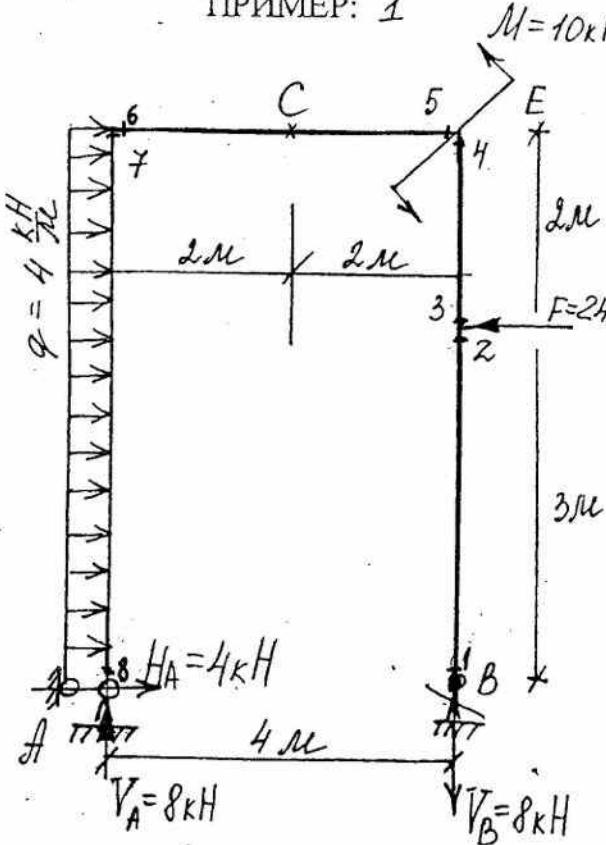
$$\sum F_x = Q_7 - N_6 = 24 - 24 = 0$$

$$\sum F_y = -Q_6 + N_7 = -8 + 8 = 0$$

$$\sum M_D = -M_7 + M_6 = -70 + 70 = 0$$

Равновесие узла Д соблюдено.

ПРИМЕР: 1



1. Произвести анализ геометрической структуры.  
 $W = 3D - 3m - 2u - con = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

-система геометрически неизменяемая статически определима.

2. Опорные реакции:  $V_A; H_A; V_B$ .

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \sum F_x = H_A + (q \cdot 5) - F = 0 \\ \sum M_A = 0 & H_A = F - (q \cdot 5) = 24 - 20 = 4 \text{ kN} \\ \sum M_B = 0 & \end{cases}$$

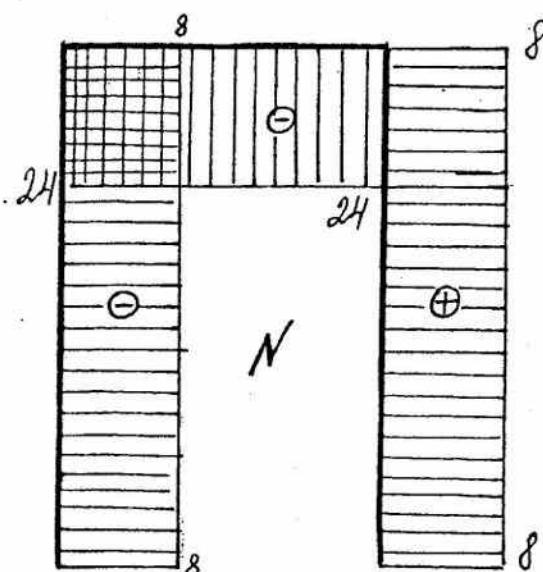
$$\sum M_A = (q \cdot 5) \cdot 2,5 - M - F \cdot 3 - V_B \cdot 4 = 0$$

$$V_B = \frac{(4 \cdot 5) \cdot 2,5 - 10 - 10}{4} = -\frac{30}{4} = -8 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = -F \cdot 3 - M + (q \cdot 5) \cdot 2,5 + V_A \cdot 4 = 0$$

$$V_A = \frac{24 \cdot 3 + 10 - (4 \cdot 5) \cdot 2,5}{4} = \frac{32}{4} = 8 \text{ kN}$$

ПРОВЕРКА:  $\sum M_C = V_B \cdot 2 + F \cdot 2 - M - (q \cdot 5) \cdot 2,5 - H_A \cdot 5 + V_A \cdot 2 = 8 \cdot 2 + 24 \cdot 2 - 10 - (4 \cdot 5) + 8 \cdot 2 = 16 + 48 - 10 - 50 - 20 + 16 = 80 - 80 = 0$ .



3) эпюра продольных сил  $N$

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = V_B = 8 \text{ kN}$$

$$N_5 = N_6 = -F = -24 \text{ kN}$$

(если рассматривать с левой стороны.  $N_6 = N_5 = -H_A - q \cdot 5 = -4 - 4 \cdot 5 = -24 \text{ kN}$ )

$$N_7 = N_8 = -V_A = -8 \text{ kN}$$

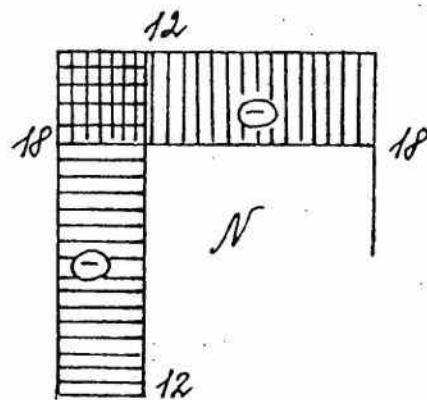
3. Определить продольную силу в сечениях и построить эпюру N.

$$N_1 = N_2 = 0$$

$$N_3 = N_4 = -F_1 = -18 \text{ kH}$$

$$N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = -V_A = -12 \text{ kH}$$

(рассмотреть с левой стороны).



4. Определить поперечную силу в сечениях и построить эпюру Q.

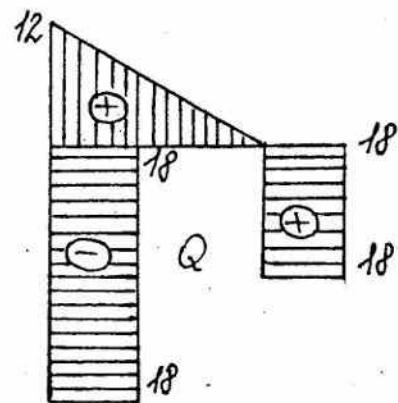
$$Q_1 = F = 18 \text{ kH} = Q_2$$

$$Q_3 = 0$$

$$Q_4 = (q \cdot 3) = 4 \cdot 3 = 12 \text{ kH}$$

$$Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = -H_A = -18 \text{ kH}$$

(рассмотреть с левой стороны).



5. Определить изгибающий момент в сечениях и построить эпюру M.

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = -F_1 \cdot 2 = -18 \cdot 2 = 36 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

$$M_3 = M_1 = -36 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

$$M_4 = -F \cdot 2 - (q \cdot 3) \cdot 1,5 = -18 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = -36 - 18 = -54 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

$$M_5 = M_4 = -54 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

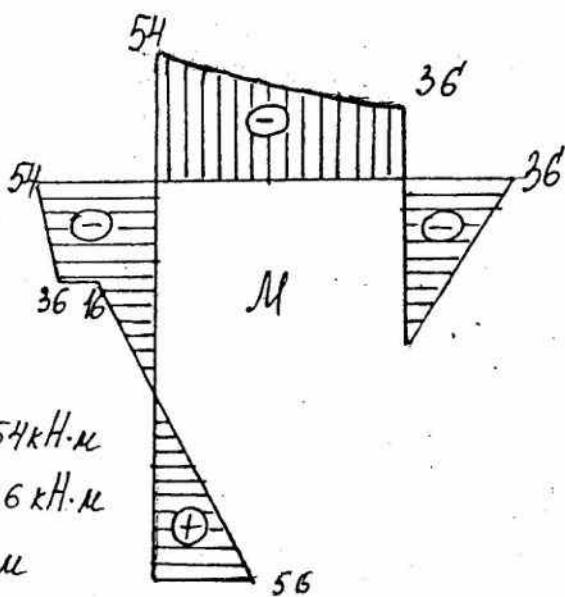
( $M_5$  можно определить рассматривая раму с левой стороны).

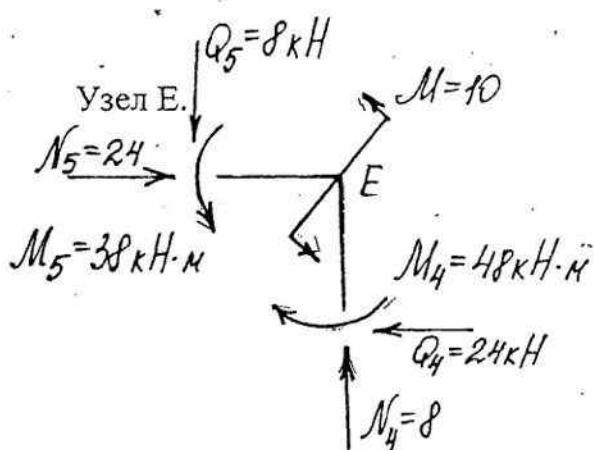
$$M_5' = M_3 - H_A \cdot 5 - M = 56 - 18 \cdot 5 - 20 = -54 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

$$M_6' = M_3 - H_A \cdot 4 - M = 56 - 18 \cdot 4 - 20 = -36 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

$$M_7' = M_3 - H_A \cdot 4 = 56 - 72 = -16 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

$$M_8' = M_3 = 56 \text{ kH} \cdot \text{м}$$





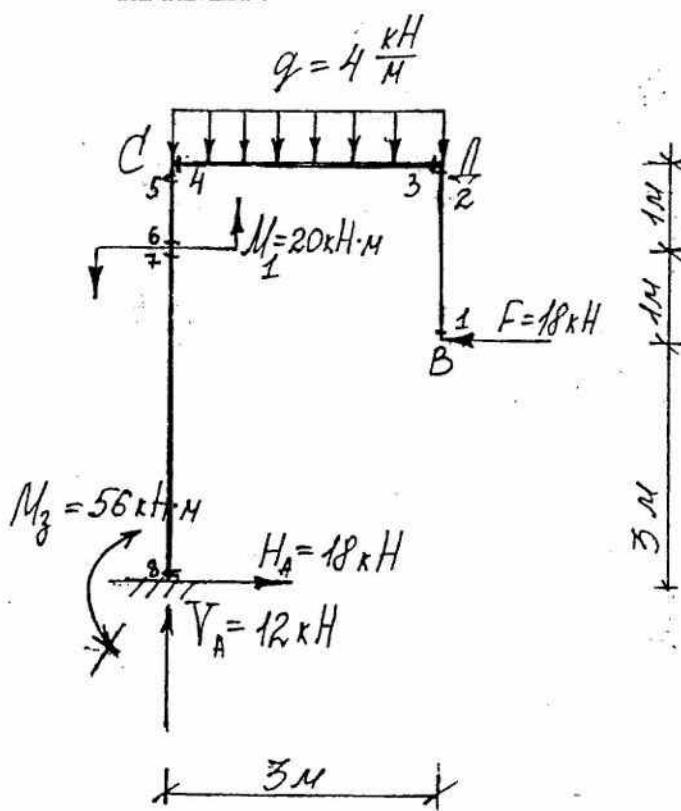
$$\sum F_x = N_5 - Q_4 = 24 - 24 = 0$$

$$\sum F_y = N_4 - Q_5 = 8 - 8 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_E &= M_4 - M - M_5 = \\ &= 48 - 10 - 38 = 0 \end{aligned}$$

Равновесие узла Е-соблюдено.

ПРИМЕР:



1. Анализ геометрической структуры системы.

$$W = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 0$$

- система геометрически неизменяема и статически определима.

2. Определить опорные реакции:

$$V_A; H_A; M_3$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

$$\sum F_x = H_A - F_1 = 0$$

$$H_A = F_1 = 18 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = V_A - q \cdot 3 = 0$$

$$V_A = q \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = -M_1 + (q \cdot 3) \cdot 1.5 - F_1 \cdot 3 - M_3 = 0$$

$$M_3 = -20 + (4 \cdot 3) \cdot 1.5 - 18 \cdot 3 = -20 + 18 - 54 = -56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(направление реакции поменялось).

Проверка реакций:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -(q \cdot 3) \cdot 1.5 - M - H_A \cdot 3 + V_A \cdot 3 + M_3 = \\ &= -(4 \cdot 3) \cdot 1.5 - 20 - 18 \cdot 3 + 12 \cdot 3 + 56 = \\ &= -18 - 20 - 54 + 36 + 56 = -92 + 92 = 0 \end{aligned}$$

## 5.2. Аналитический способ расчета.

Различают два метода аналитического способа расчета ферм:

- метод вырезания узлов;
- метод сквозного сечения.

### 5.2.1. Метод вырезания узлов.

Заключается в последовательном вырезании отдельных узлов фермы. Влияние отброшенной части фермы заменяется неизвестными продольными силами  $N_i$  направленными вдоль осей разрезанных стержней.

### АЛГОРИТМ РАСЧЕТА.

1. Вычертить в масштабе расчетную схему.

2. Провести анализ геометрической структуры системы.

$$W = 3D - 3m - 2n - cop \quad (\text{см. } \pi. 7.2 \text{ об-и 1})$$

3. Определить опорные реакции.

4. Обозначить стержни (цифрами).

5. Расчет фермы начинают с узла, в который входят не более двух неизвестных стержней.

6. Неизвестные усилия в стержнях определяют из условия равновесия рассматриваемого узла.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

7. Далее последовательно вырезают узлы и определяют неизвестные усилия из условия равновесия узла.

ПРИМЕЧАНИЕ: в рассматриваемом узле неизвестных усилий не должно быть больше двух.

ПРИМЕР 1. Определить усилия в стержнях фермы.

1. Анализ геометрической структуры.

$$W = 3D - 3m - 2n - cop$$

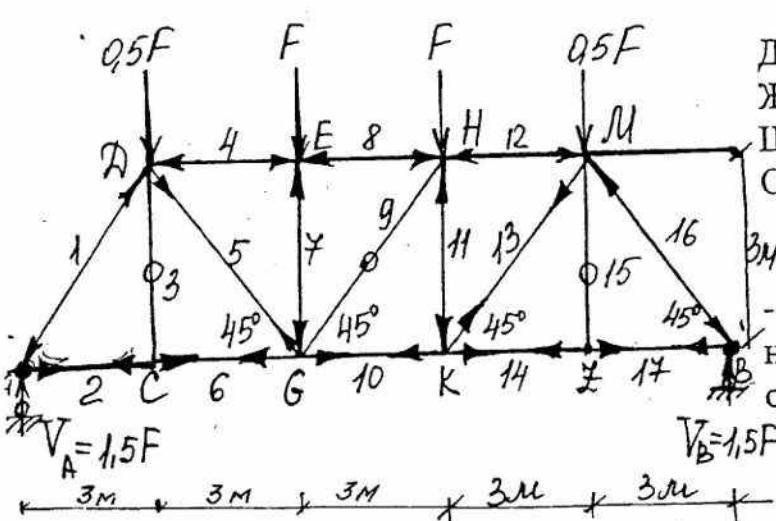
$D = 17$  (число дисков)

$m = 0$  (число жестких соединений)

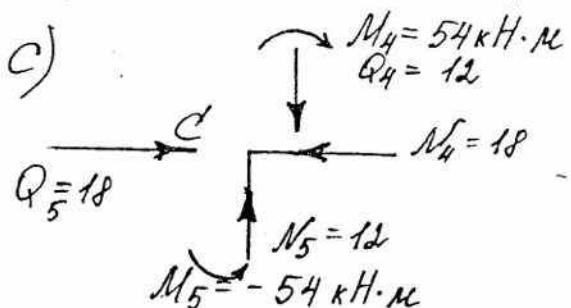
$n = 24$  (число простых шарниров)

$c_{op} = 3$  (число опорных стержней)

$W = 3 \cdot 17 - 2 \cdot 24 - 3 = 51 - 48 - 3 = 0$  — система геометрически неизменяема и статически определима.



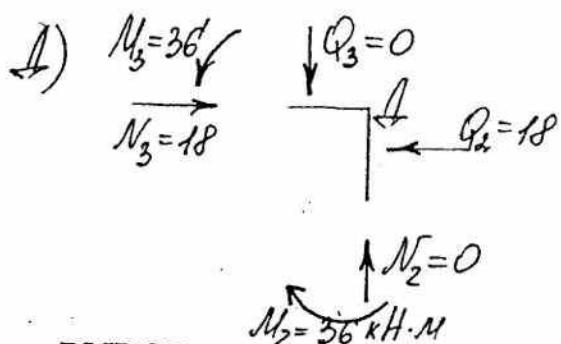
6. Проверка правильности построения эпюра.



$$\sum F_x = Q_5 - N_4 = 18 - 18 = 0$$

$$\sum F_y = N_5 - Q_4 = 12 - 12 = 0$$

$$\sum M_C = -M_5 + M_4 = -54 + 54 = 0$$



$$\sum F_x = N_3 - Q_2 = 18 - 18 = 0$$

$$\sum F_y = N_2 - Q_3 = 0$$

$$\sum M_C = M_2 - M_3 = 36 - 36 = 0$$

ВЫВОД: внутренние усилия  $N$ ;  $Q$ ;  $M$  определены верно, так как равновесие узлов С и Д соблюdenы.

### ТЕМА 5. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ПЛОСКИЕ ФЕРМЫ.

Реальная ферма представляет собой стержневую конструкцию, состоящую из прямолинейных стержней, соединенных в узлах обычно жесткими связями.

Классификацию ферм рассмотреть самостоятельно по учебнику:  
Л.П. Портаев, А.А. Петраков "Техническая механика", М.Стройиздат.  
1987г. № 31.1. Н.В. Мухин, А.Н. Першив "Статика сооружений"  
М.Высшая школа. 1980. № 1,6.2.

#### 5.1. Расчет ферм.

Расчет ферм заключается в определении внутренних усилий в стержнях фермы.

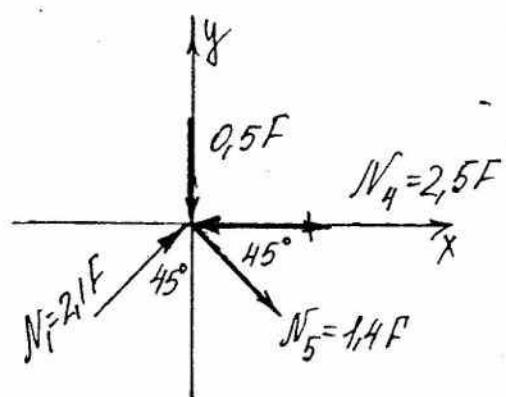
Под действием внешних нагрузок в стержнях фермы возникают продольные сжимающие или растягивающие усилия  $N$ .

Растягивающие - считаются положительными, сжимающие – отрицательными.

Для расчета ферм пользуются двумя способами: аналитическим и графическим.

Любой способ расчета начинается с определения опорных реакций.

в) Следующий узел Д- в который входит известный стержень 1, внешняя нагрузка  $0,5F$  и стержни 4 и 5 усилия которых  $N_4$  и  $N_5$  неизвестные.



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 & \sum F_y = -0,5F + N_1 \cos 45^\circ - N_5 \cos 45^\circ = 0 \\ \sum F_x = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N_5 &= \frac{-0,5F + N_1 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \\ &= \frac{-0,5F + 2,1F \cdot 0,7}{0,7} = 1,4F \end{aligned}$$

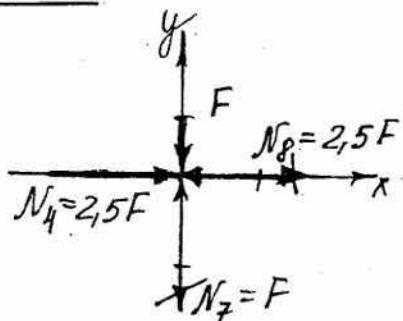
(стержень растянут)

$$\sum F_x = N_1 \cos 45^\circ + N_5 \cos 45^\circ + N_4 = 0$$

$$\begin{aligned} N_4 &= -N_1 \cos 45^\circ - N_5 \cos 45^\circ = \\ &= -2,1 \cdot 0,7 - 1,4 \cdot 0,7 \approx -2,5F \end{aligned}$$

(стержень сжат- направление поменять)

г) Узел Е-неизвестные  $N_7$  и  $N_8$ .



$$\sum F_x = N_8 + N_4 = 0$$

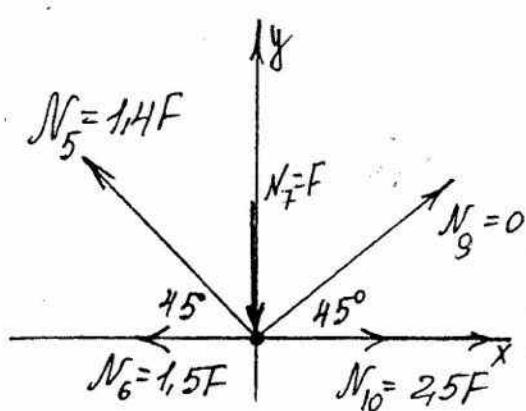
$$N_8 = -N_4 = -2,5F \quad (\text{стержень сжат})$$

$$\sum F_y = -F - N_7 = 0$$

$$N_7 = -F$$

(стержень сжат)

д) Узел G- неизвестные  $N_9$  и  $N_{10}$



$$\sum F_y = -N_7 + N_5 \cos 45^\circ + N_9 \cos 45^\circ = 0$$

$$N_9 = \frac{N_7 - N_5 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{F - 1,4F \cdot 0,7}{0,7} = 0$$

(конструктивный стержень)

$$N_{10} = N_6 + N_5 \cos 45^\circ - N_9 \cos 45^\circ =$$

$$= 1,5F + 1,4F \cdot 0,7 - 0 = 2,5F.$$

2. Определение опорных реакций.

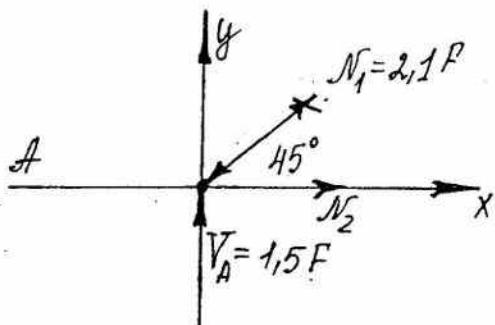
$$V_A = V_B = \frac{F + F + 2 \cdot 0,5F}{2} = \frac{3F}{2} = 1,5F$$

(т.к. система нагружена симметрично относительно опор)

3. Обозначить стержни цифрами.

4. Расчет производим с левой опоры (можно и с правой).

а) рассмотреть узел A – в узел входят  $V_A = 1,5F$  и стержни 1 и 2, усилия которых не известны.



$N_1$  и  $N_2$  – считаем растянутыми.

$$\sum F_y = N_1 \cos 45^\circ + V_A = 0$$

$$N_1 = -\frac{V_A}{\cos 45^\circ} = -\frac{1,5F}{0,7} = -2,1F$$



сжатый стержень  
растянутый стержень

направление стержня надо поменять –  
стержень сжат.

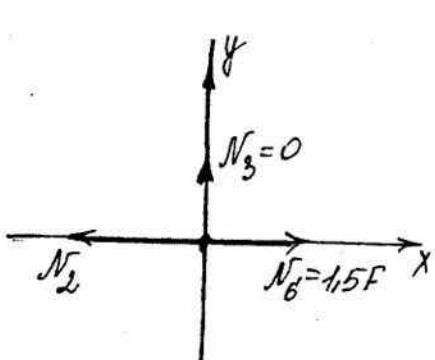
$$\sum F_x = N_2 - N_1 \cos 45^\circ = 0$$

$$N_2 = N_1 \cos 45^\circ = 2,1F \cdot 0,7 = 1,5F$$

(стержень растянут).

Стержни – направление, которых определены указать на расчетной схеме.

б) следующий узел С – неизвестные стержни 3 и 6 –  $N_3$  и  $N_6$  – растянут (направления произвольные).



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

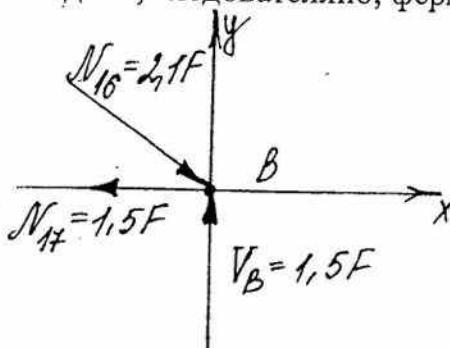
$$\sum F_x = N_6 - N_2 = 0$$

$N_6 = N_2 = 1,5F$  – стержень растянут

$$\sum F_y = N_3 = 0; N_3 = 0$$

(конструктивный стержень).

к) Последний узел, в данном случае узел В- проверочный, т.к. усилия всех стержней, входящих в узел известны. Если условие равновесия узла будет соблюдено, следовательно, ферма расчитана верно.

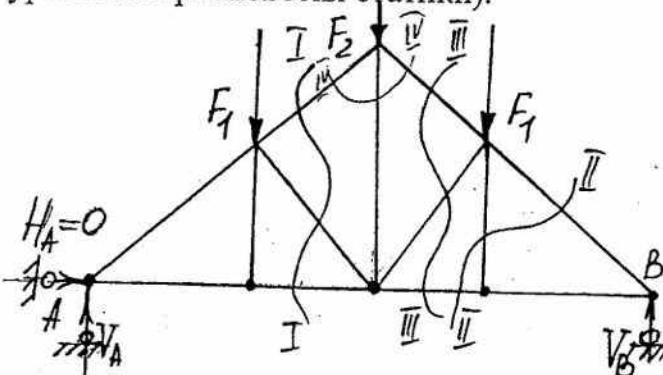


$$\begin{aligned}\sum F_x &= -N_{14} + N_{16} \cos 45^\circ = \\ &= -1,5F + 2,1 \cdot 0,7 \cdot F = -1,5F + 1,5F = \\ \sum F_y &= V_B - N_{16} \cos 45^\circ = \\ &= 1,5F - 2,1F \cdot 0,7 = 1,5F - 1,5F = 0 \\ \text{T.O. } &\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right. , \text{ следовательно}\end{aligned}$$

узел В- в равновесии, ферма расчитана верно.

#### 5.2.2. Метод сквозного сечения.(Способ моментных точек, способ Риттера).

Ферма разрезается сквозным сечением на две части таким образом, чтобы перерезанными оказались не более трех стержней с неизвестными силами( т.к. для плоской системы сил можно составить только три уравнения равновесия статики).



Пример:

сечения: I-I; II-II; III-III.

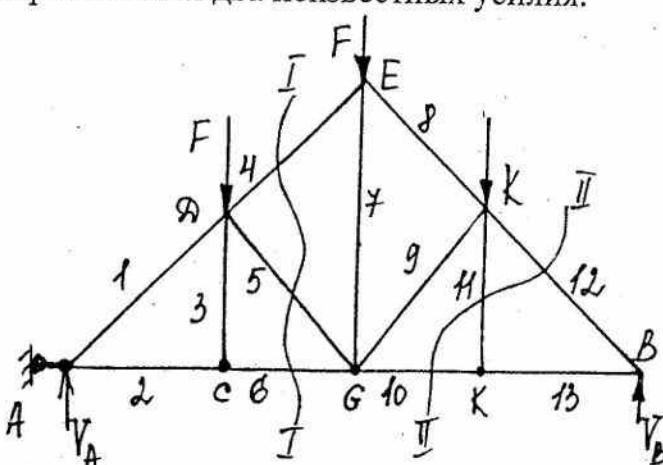
Примечание: оси трех неизвестных стержней не должны сходиться в одной точке.

(например: нельзя брать сечение как сечение IV-IV)

При расчете одну из частей фермы отбрасывают, заменяя ее действие продольными внутренними силами  $N_i$ .

Для оставшейся части составляют три уравнения моментов относительно трех точек, не лежащих на одной прямой(моментные точки).

Примечание: в качестве моментных точек удобнее брать точки, в которых пересекаются два неизвестных усилия.



Например:

сечение 1-1-неизвестные.

усилия

Моментные точки:

(.) G-пересекаются

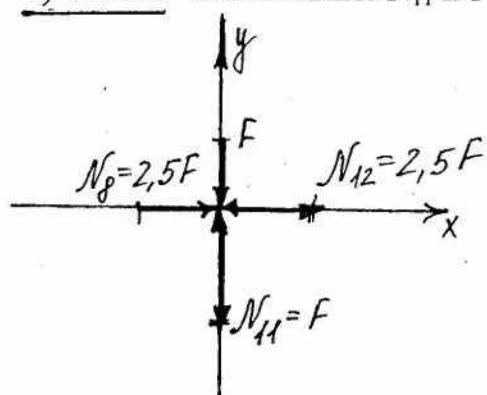
неизвестные  $N_5$  и  $N_6$

Составляя уравнение

момента  $\sum M_G = 0$  определяем

усилие  $N_4$ .

е) Узел H- неизвестные  $N_{11}$  и  $N_{12}$



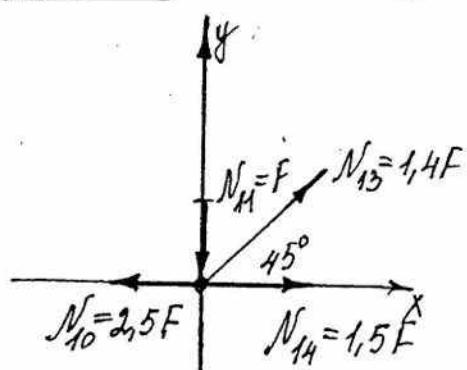
$$\sum F_x = N_{12} + N_8 = 0$$

$$N_{12} = -N_8 = -2,5F \text{ (сжатие)}$$

$$\sum F_y = -F - N_{11} = 0$$

$$N_{11} = -F \text{ (сжатие)}$$

ж) Узел K- неизвестные  $N_{13}$  и  $N_{14}$



$$\sum F_y = N_{13} \cos 45^\circ - N_{11} = 0$$

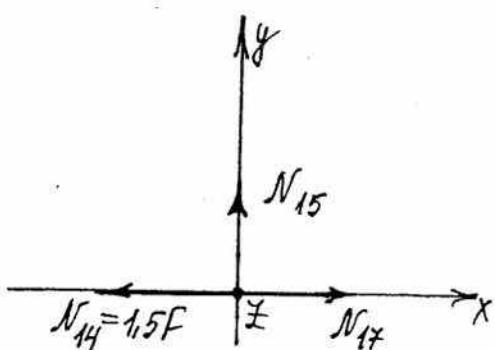
$$N_{13} = \frac{N_{11}}{\cos 45^\circ} = \frac{F}{0,7} = 1,4F \text{ (растяжение)}$$

$$\sum F_x = N_{14} + N_{13} \cos 45^\circ - N_{10} = 0$$

$$N_{14} = -N_{13} \cos 45^\circ + N_{10} =$$

$$= -1,4F \cdot 0,7 + 2,5F = 1,5F \text{ (растяжение)}$$

з) Узел Z- неизвестные  $N_{15}$  и  $N_{17}$



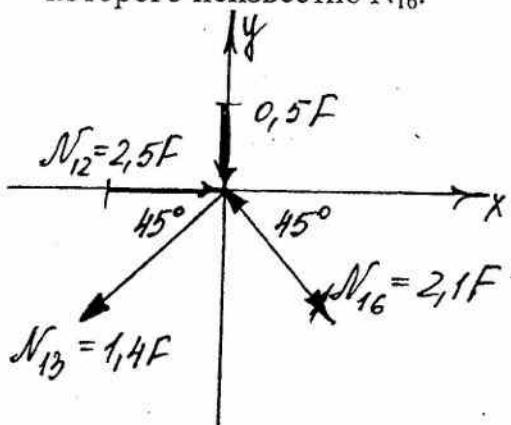
$$\sum F_x = N_{17} - N_{14} = 0$$

$$N_{17} = N_{14} = 1,5F \text{ (растяжение)}$$

$$\sum F_y = N_{15} = 0$$

$N_{15} = 0$  (конструктивный)

и) Узел M (можно и узел В) в узел входит только один стержень, усилие которого неизвестно  $N_{16}$ .



$$\sum F_x = N_{16} \cos 45^\circ + N_{12} - N_{13} \cos 45^\circ = 0$$

$$N_{16} = \frac{N_{13} \cdot 0,7 - N_{12}}{0,7} = \frac{1,4F \cdot 0,7 - 2,5F}{0,7} = \frac{F - 2,5F}{0,7} = -\frac{1,5F}{0,7} = -2,1F$$

(стержень сжат)

2) Для определения усилий  $N_4, N_5, N_6$  проводим сквозное сечение I-I.

Правую часть фермы (до сечения I-I) отбрасываем. Выбираем направление стержней (показать стрелками на расчетной схеме).

3) Выбираем моментные точки.

Для определения  $N_6$  удобнее взять точку Д.

Для определения  $N_4$  удобнее взять точку Г.

Для определения  $N_5$  удобнее взять точку С.

Составить и решить уравнения моментов.

$$\sum M_A = V_A \cdot 3 - N_6 \cdot 3 = 0$$

$$N_6 = \frac{V_A \cdot 3}{3} = 1,5 F$$

$$\sum M_G = V_A \cdot 6 - 0,5 F \cdot 3 - N_4 \cdot 3 = 0$$

$$N_4 = \frac{1,5 F \cdot 6 - 0,5 F \cdot 3}{3} = \frac{7,5 F}{3} = 2,5 F$$

$$\sum M_C = V_A \cdot 3 - N_4 \cdot 3 - N_5 \cdot \gamma_1 = 0, \quad \gamma_1 = 3 \cdot \cos 45^\circ$$

$$N_5 = \frac{1,5 F \cdot 3 - 2,5 F \cdot 3}{3 \cdot 0,7} = -\frac{3 F}{3 \cdot 0,7} = -1,4 F \text{ (направление усилия изменяется)}$$

4) Для определения усилий  $N_8, N_9, N_{10}$  проводим сквозное сечение II-II. Отбрасываем левую часть фермы (до сечения II-II). Выбираем направление усилий (на расчетной схеме).

5) Выбираем моментные точки.

Для определения  $N_{10}$  удобнее взять точку Н.

Для определения  $N_8$  удобнее взять точку Г.

Для определения  $N_9$  удобнее взять точку К.

Составить уравнения моментов и решить.

$$\sum M_H = 0,5 F \cdot 3 - V_B \cdot 6 + N_{10} \cdot 3 = 0$$

$$N_{10} = \frac{1,5 F \cdot 6 - 0,5 F \cdot 3}{3} = \frac{7,5 F}{3} = 2,5 F$$

$$\sum M_G = F \cdot 3 + 0,5 F \cdot 6 - V_B \cdot 9 + N_8 \cdot 3 = 0$$

$$N_8 = \frac{-F \cdot 3 - 3 F + 1,5 F \cdot 9}{3} = \frac{-6 F + 13,5 F}{3} = \frac{7,5 F}{3} = 2,5 F$$

$$\sum M_K = 0,5 F \cdot 3 - V_B \cdot 6 + N_9 \cdot \gamma_2 + N_8 \cdot 3 = 0 \quad (\gamma_2 = 3 \cos 45^\circ = 3 \cdot 0,7)$$

$$N_9 = \frac{-1,5 F + 9 F - 2,5 F \cdot 3}{3 \cdot 0,7} = \frac{0}{2,1} = 0$$

(.) Д-пересекаются неизвестные  $N_4$  и  $N_5$   
через  $\sum M_D=0$ - определяем усилие  $N_6$ .

(.) G - через  $\sum M_G=0$  можно определить усилие  $N_5$  и  $N_4$ - определено ранее.

Сечение II-II.

(.) H через  $\sum M_H=0$  - определяем усилие  $N_{10}$

(.) K через  $\sum M_K=0$  - определяем усилие  $N_{12}$

(.) В через  $\sum M_B=0$  - определяем усилие  $N_{11}$ .

Преимущество этого способа заключается в том, что усилия стержней не перерезанных данным сечением не влияют на величину исковых усилий стержней перерезанных данным сечением.

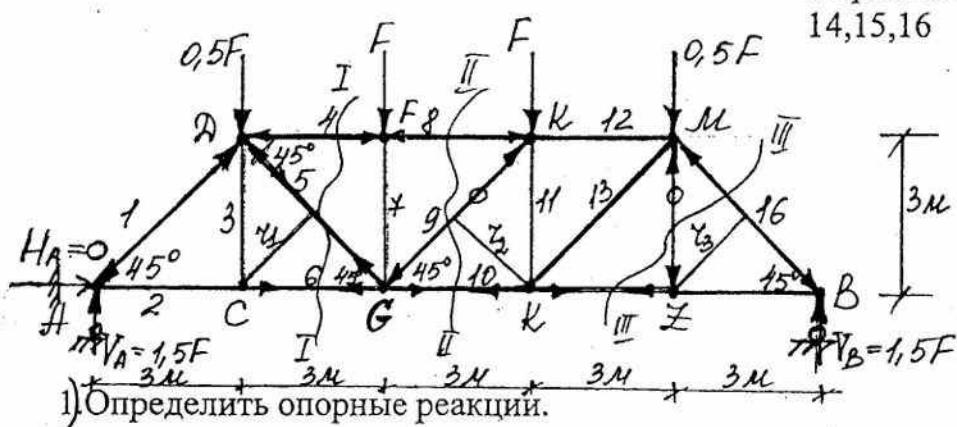
### АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА.

1. Вычертить расчетную схему, определить углы.
2. Определить опорные реакции фермы.
3. Разрезать ферму сквозным сечением, таким образом, чтобы попали стержни, усилия которых необходимо определить.
4. Отбросить(мысленно) одну из частей фермы.
5. Выбрать направления неизвестных стержней(произвольно).
6. Определить моментные точки оставшейся части.
7. Составить уравнения моментов относительно выбранных моментных точек.
8. Решить уравнения моментов и определить неизвестные усилия стержней.

ПРИМЕЧАНИЕ: если величина усилия получится отрицательной- направление усилия поменять.

Пример2.

Определить усилия в  
стержнях: 4, 5, 5, 8, 9, 10,  
14, 15, 16



1) Определить опорные реакции.

(система нагружена  
симметрично).

$$V_A = V_B = \frac{0.5F + F + F + 0.5F}{2} = 1.5F$$

## Вопросы по «Статике сооружения»

1. Подбор сечения центрально-сжатых стоек.
2. Статика сооружений. Основные понятия.
3. Геометрически изменяемые и неизменяемые системы.
4. Многопролетные шарнирно-консольные балки. Общие сведения.
5. Поэтажные схемы
6. Расчет многопролетных шарнирных балок.
7. Общие сведения о плоских статически определимых рамках.  
Внутренние усилия в элементах рамы: -продольная сила  
-поперечная сила  
-изгибающий момент
8. Определение усилий в элементах рам.
9. Эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M_{iz}$  в рамках.
10. Плоские статически определимые фермы. Элементы ферм. Усилия в элементах ферм.
11. Определение усилий в стержнях ферм; методы определения усилий.
12. Аналитический способ определения усилий в стержнях ферм.
13. Графический способ (диаграмма Максвелла-Кремоны).

6) Для определения усилий  $N$ : проводим сечение III-III. Левую часть фермы до сечения III-III отбрасываем.

Моментные точки: M - для определения  $N_{14}$ .

Z - для определения  $N_{16}$ .

B - для определения  $N_{15}$

$$\sum M_M = -V_B \cdot 3 + N_{14} \cdot 3 = 0$$
$$N_{14} = \frac{V_B \cdot 3}{3} = V_B = 1,5F$$

$$\sum M_Z = -V_B \cdot 3 + N_6 \cdot z_3 = 0 \quad (z_3 = 3 \cos 45^\circ = 3 \cdot 0,7)$$
$$N_{16} = \frac{1,5F \cdot 3}{3 \cdot 0,7} = \frac{1,5F}{0,7} = 2,1F$$

$$\sum M_B = -N_5 \cdot 3 = 0$$
$$N_{15} = 0$$

Примечание: величина и направление найденных усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов и методом сквозных сечений должны совпадать.

Вывод: ферма рассчитана верно. Зная числовые значения внешних нагрузок можно определить числовую величину всех внутренних усилий, возникающих в стержнях ферм..

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.Я. Молотников «Основы теоретической механики». Ростов-на-Дону, серия «Высшее образование» «Феникс». 2004 г.
2. В.И. Сапрыкин «Техническая механика» серия «Учебники, учебные пособия». Ростов-на-Дону, «Феникс»; Харьков «Торшиг» 2003г.
3. Олофинская В.П. «Техническая механика» учебное пособие 0 М: Форум: Инфра-М Серия «Профессиональное образование» И.Д. «Форум» 2003 г.
4. А.И. Аркуша; М.И. Фролов «Техническая механика» М. «Высшая школа», 1983г.
5. Л.П. Портаев, А.А. Петраков «Техническая механика» М. «Стройиздат», 1987г.