Санкт-Петербургское государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Академия управления городской средой, градостроительства и печати»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебно-производственной работе
_______________ О.В. Фомичева
«[illegible]» [illegible] 2023 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению практических работ
по учебной дисциплине
ОП.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

для специальности

09.02.06 Сетевое и системное администрирование

Санкт-Петербург
2023 г.

Методические рекомендации рассмотрены на заседании методического совета СПб ГБПОУ «АУГСГиП»

Протокол № 2 от «29» 11 2023 г.

Методические рекомендации одобрены на заседании цикловой комиссии информационных технологий

Протокол № 4 от «21» 11 2023 г.

Председатель цикловой комиссии: Караченцева М.С. ______________

Разработчики: преподаватели СПб ГБПОУ «АУГСГиП»

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ предназначены для организации работы на практических занятиях по учебной дисциплине «Элементы высшей математики», которая является важной составной частью в системе подготовки специалистов среднего профессионального образования по специальности 09.02.06 Сетевое и системное администрирование.

Практические занятия являются неотъемлемым этапом изучения учебной дисциплины и проводятся с целью:

- формирования практических умений в соответствии с требованиями к уровню подготовки обучающихся, установленными рабочей программой учебной дисциплины;
- обобщения, систематизации, углубления, закрепления полученных теоретических знаний;
- готовности использовать теоретические знания на практике.

Практические занятия по учебной дисциплине «Элементы высшей математики» способствуют формированию в дальнейшем при изучении профессиональных модулей следующих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

В методических рекомендациях предлагаются к выполнению практические работы, предусмотренные учебной рабочей программой дисциплины «Элементы высшей математики».

При разработке содержания практических работ учитывался уровень сложности освоения студентами соответствующей темы, общих и профессиональных компетенций, на формирование которых направлена дисциплина.

Методические рекомендации по учебной дисциплине «Элементы высшей математики» имеют практическую направленность и значимость. Формируемые в процессе практических занятий умения могут быть использованы студентами в будущей профессиональной деятельности.

Оценки за выполнение практических работ выставляются по пятибалльной системе. Оценки за практические работы являются обязательными текущими оценками по учебной дисциплине и выставляются в журнале теоретического обучения.

1. Перечень практических работ по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

№ раздела, темы	Освоение умений в процессе выполнения работы	Тема практической работы	Кол-во часов
Тема 1.1. Основы дифференциального исчисления	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	№ 1. Вычисление производных сложной функции.	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	№ 2. Геометрический смысл производной первого и второго порядка.	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	№ 3. Нахождение промежутков монотонности и экстремумов функции.	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	№ 4. Построение графиков функций при помощи производной.	2
Тема 1.2. Основы интегрального исчисления	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	№ 5. Вычисление неопределенных интегралов.	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	№6. Вычисление неопределенных интегралов методом подстановки	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	№ 7. Вычисление определенных интегралов.	2
Тема 1.3 Дифференциальные уравнения	• решать дифференциальные уравнения	№8 Решение дифференциальных уравнений	2
Тема 2.1. Матрицы	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 9. Действия над матрицами.	2
Тема 2.2. Определители	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 10. Вычисление определителей.	2
Тема 2.3. Системы линейных уравнений	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 11. Решение систем методом Крамера	2
	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 12. Решение систем методом Гаусса.	2
	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 13. Решение систем линейных уравнений в матричном виде.	1

№ раздела, темы	Освоение умений в процессе выполнения работы	Тема практической работы	Кол-во часов
Тема 3.1 Понятие функционального и степенного ряда	• выполнять операции над множествами	№ 14. Выполнение операций над множествами	2
ИТОГО			28

2. Описание порядка выполнения практических работ
2.1. Практическая работа № 1

«Вычисление производных сложной функции»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 1.1 «Основы дифференциального исчисления»;
- сформировать умение находить производные высших порядков;
- развитие общих компетенций по ОК2, ОК3.
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: правила вычисления производных 1 и высших порядков;
производных сложных функций.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

ФОРМУЛЫ ПРОИЗВОДНЫХ.

1. $C^/ = 0$
2. $(кx)/ = к$
3. $(кx+в)/ = к$
4. $(U+V)^/ = U^/+V^/$
5. $(U-V)^/ = U^/-V^/$
6. $(UV)^/ = U^/V+V^/U$
   $(кU)^/ = к(U)/$
7. $(\frac{U}{V})^/ = \frac{U^/V-V^/U}{V^2}$
8. $(x^n) = nx^{n-1}$
9. $(\sin x)/ = \cos x$
10. $(\cos x)/ = -\sin x$
11. $(\mathrm{tg}x)/ = \frac{1}{\cos^2 X}$
12. $(\mathrm{ctg}x)/ = -\frac{1}{\sin^2 X}$
13. $(\log ax)/ = \frac{1}{XLnA}$
14. $(\ln x)/ = \frac{1}{X}$
15. $(\lg x)/ = \frac{1}{XLn10}$
16. $(e^x) = e^x$
17. $(a^x)^/ = a^x\ln a$
18. $(\mathrm{arctg}x)^/ = \frac{1}{1+x^2}$
19. $(\mathrm{arcctg}x)^/ = -\frac{1}{1+x^2}$
20. $(\arcsin x)^/ = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $(\arccos x)^/ = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила дифференцирования.

Производная суммы и разности.

Пусть даны функции f(x) и g(x), производные которых нам известны. Тогда можно найти производную суммы и разности этих функций:

$\mathbf{(f + g)^/= f^/ + g^/}$ $\mathbf{(f - g)^/ = f^/ - g^/}$

Итак, производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных. Слагаемых может быть больше. Например, $\mathbf{(f + g + h)^/ = f^/+ g^/ + h^/}$**.** Строго говоря, в алгебре не существует понятия «вычитание». Поэтому разность $f - g$ можно переписать как сумму $f + (-1) \cdot g$, и тогда останется лишь одна формула — производная суммы.

Примеры. Найти производные функций: $f(x) = x^2 + \sin x$; $g(x) = x^4 + 2x^2 - 3$.

Решение.

1. Функция $f(x)$ — это сумма двух элементарных функций, поэтому: $f'(x) = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$;

2. Аналогично рассуждаем для функции $g(x)$. Только там уже три слагаемых (с точки зрения алгебры): $g'(x) = (x^4 + 2x^2 - 3)' = (x^4 + 2x^2 + (-3))' = (x^4)' + (2x^2)' + (-3)' = 4x^3 + 4x + 0 = 4x \cdot (x^2 + 1)$.

Производная произведения.

$(\mathbf{f \cdot g})' = \mathbf{f' \cdot g + f \cdot g'}$

Формула несложная, но ее часто забывают. И не только школьники, но и студенты. Результат — неправильно решенные задачи.

Примеры. Найти производные функций: $f(x) = x^3 \cdot \cos x$; $g(x) = (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x$.

Решение.

1. Функция $f(x)$ представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому: $f'(x) = (x^3 \cdot \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x)$

2.У функции $g(x)$ первый множитель сложней, но общая схема от этого не меняется. Очевидно, первый множитель функции $g(x)$ представляет собой многочлен, и его производная — это производная суммы. Имеем:

$g'(x) = ((x^2 + 7x - 7) \cdot e^x)' = (x^2 + 7x - 7)' \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot (e^x)' = (2x + 7) \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x = e^x \cdot (2x + 7 + x^2 + 7x - 7) = (x^2 + 9x) \cdot e^x = x(x + 9) \cdot e^x$.

Обратите внимание, что на последнем шаге производная раскладывается на множители. Формально этого делать не нужно, однако большинство производных вычисляются не сами по себе, а чтобы исследовать функцию. А значит, дальше производная будет приравниваться к нулю, будут выясняться ее знаки и так далее. Для такого дела лучше иметь выражение, разложенное на множители.

Производная частного.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Примеры. Найти производные функций:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad g(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

Решение.

1.В числителе и знаменателе каждой дроби стоят элементарные функции, поэтому все, что нам нужно — это формула производной частного:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

2. $$g'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2}$$

По традиции, разложим числитель на множители — это значительно упростит ответ:

$$g'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{xe^x(2 - x)}{(e^x)^2} = \frac{x(2 - x)}{e^x}$$

2.Производная сложной функции.

Сложная функция — это не обязательно формула длиной в полкилометра. Например, достаточно взять функцию f(x) = sin x и заменить переменную x, скажем, на $x^2 + \ln x$. Получится $f(x) = \sin(x^2 + \ln x)$ — это и есть сложная функция. У нее тоже есть производная, однако найти ее по правилам, рассмотренным выше, не получится. Как быть? В таких случаях помогает замена переменной и формула производной сложной функции: **$f'(x) = f'(t) \cdot t'$, если x заменяется на t(x).**

Как правило, с пониманием этой формулы дело обстоит еще более печально, чем с производной частного. Поэтому ее тоже лучше объяснить на конкретных примерах, с подробным описанием каждого шага.

Примеры. Найти производные функций: $f(x) = e^{2x+3}$; $g(x) = \sin(x^2 + \ln x)$

Решение.

1.Заметим, что если в функции f(x) вместо выражения 2x + 3 будет просто x, то получится элементарная функция $f(x) = e^x$. Поэтому делаем замену: пусть 2x + 3 = t, $f(x) = f(t) = e^t$. Ищем производную сложной функции по формуле: $f'(x) = f'(t) \cdot t' = (e^t)' \cdot t' = e^t \cdot t'$.А теперь — внимание! Выполняем обратную замену: t = 2x + 3. Получим: $f'(x) = e^t \cdot t' = e^{2x+3} \cdot (2x + 3)' = e^{2x+3} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x+3}$

2.Теперь разберемся с функцией g(x). Очевидно, надо заменить $x^2 + \ln x = t$. Имеем: $g'(x) = g'(t) \cdot t' = (\sin t)' \cdot t' = \cos t \cdot t'$.Обратная замена: $t = x^2 + \ln x$. Тогда: $g'(x) = \cos(x^2 + \ln x) \cdot (x^2 + \ln x)' = \cos(x^2 + \ln x) \cdot (2x + 1/x)$.

Таким образом, вычисление производной сводится к избавлению от этих самых штрихов по правилам, рассмотренным выше. В качестве последнего примера вернемся к производной степени с рациональным показателем:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Немногие знают, что в роли n вполне может выступать дробное число. Например, корень — это $x^{0,5}$. А что, если под корнем будет стоять что-нибудь навороченное? Снова получится сложная функция — такие конструкции любят давать на контрольных работах и экзаменах.

Примеры. Найти производную функции:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 7}$$

Решение. Для начала перепишем корень в виде степени с рациональным показателем: $f(x) = (x^2 + 8x - 7)^{0,5}$. Теперь делаем замену: пусть $x^2 + 8x - 7 = t$. Находим производную по формуле: $f'(x) = f'(t) \cdot t' = (t^{0,5})' \cdot t' = 0,5 \cdot t^{-0,5} \cdot t'$.

Делаем обратную замену: $t = x^2 + 8x - 7$. Имеем:

$f'(x) = 0,5 \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5} \cdot (x^2 + 8x - 7)' =$

$0,5 \cdot (2x + 8) \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5}$.

Наконец, возвращаемся к корням:

$$f'(x) = \frac{0,5 \cdot (2x + 8)}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}}$$

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Задача 1.

Найти производные данных функций.

1.1. а) $y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3 + x + 1}}$; б) $y = \left(e^{\cos x} + 3\right)^2$;

в) $y = \ln\sin\left(2x+5\right)$; г) $y = x^{x^7}$;

1.2. а) $y = x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y = 4(\sin x)/\cos^2 x$;

в) $y = arctge^{2x}$; г) $y = x^{1/x}$;

1.3. а) $y = x\sqrt{(1+x^2)/(1-x)}$; б) $y = 1/tg^2 2x$;

в) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y = x^{\ln x}$;

1.4. а) $y = (3+6x)/\sqrt{3-4x+5x^2}$; б) $y = \sin x - x\cos x$;

в) $y = x^m \ln x$; г) $y = x^{-tgx}$;

1.5. а) $y = x/\sqrt{a^2-x^2}$; б) $y = (\sin^2 x)/(2+3\cos^2 x)$;

в) $y = (x\ln x)/(x-1)$; г) $y = (arctgx)^{\ln x}$;

1.6. а) $y = 1/\sqrt{x^2+1} + 5\sqrt[5]{x^3+1}$; б) $y = 2tg^3(x^2+1)$;

в) $y = 3^{arctgx^3}$; г) $y = (arctgx)^x$;

2.2. Практическая работа № 2

Геометрический смысл производной первого и второго порядка.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 1.1 «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»;
- сформировать умение решать задачи по теме, развитие общих компетенций по ОК 2.
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: правила вычисления производных 1 и высших порядков, геометрический смысл производной

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Геометрический смысл производной;

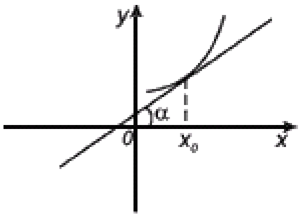
2. Формулы производных;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

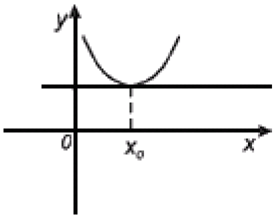
Задание для практической работы
и инструктаж по ее выполнению
Задачи для решения на уроке

. Геометрический смысл производной.

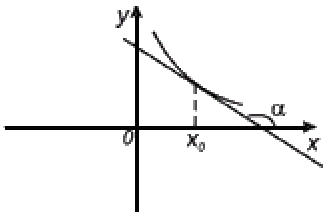
Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке: к = $y'(x_0)$.



$f'(x_0) = tg\alpha > 0$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$



$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

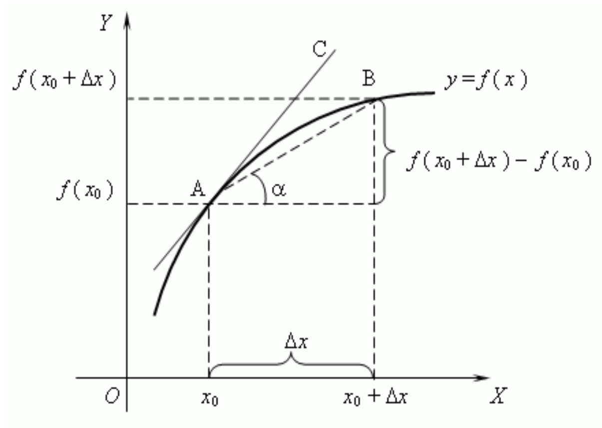


Рис. 1

Видим, что для любых двух точек *A* и *B* графика функции:

$\frac{f(x0+\Delta x) - f(x0)}{\Delta x} = tg\alpha$, где α - угол наклона секущей *AB*.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку *A* и двигать по направлению к ней точку *B*, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая *AB* приближается к касательной *AC*. Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке *A*.

Отсюда следует: **Значение производной функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.**

Справочный материал.

Геометрический смысл производной.

$к = tg\alpha = f'(x_0)$

Уравнение касательной

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали

$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x0)}(x - x_0)$

Условия:

параллельности прямых: $к_1 = к_2$ перпендикулярности

прямых: $к_1 к_2 = -1$

Пример 1. На параболе $y = x^2 - 2x - 8$ найти точку M, в которой касательная к ней параллельна прямой $4x + y + 4 = 0$.

Решение. Определим угловой коэффициент касательной к параболе

$y = x^2 - 2x - 8$: $k = y' = (x^2 - 2x - 8)' = 2x - 2$.

Найдем угловой коэффициент прямой $4x + y + 4 = 0$: $y = -4x - 4$, $k = -4$. Касательная к параболе и данная прямая, по условию, параллельны. Следовательно, их угловые коэффициенты равны, т.е. $2x - 2 = -4$; $x = -1$ – абсцисса точки касания. Ординату точки касания M вычислим из уравнения данной параболы $y = x^2 - 2x - 8$, то есть $y(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 8 = -5$, M(-1;-5).

Ответ: M(-1;-5).

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x+e^{-2x}$, параллельной прямой $y = -x$.

Решение. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания x_0. Так как касательная параллельна прямой $y = -x$, значит ее угловой коэффициент равен –1.Таким образом, $f'(x_0) = -1$.

Найдём производную функции: $f' = 1 - 2e^{-2x}$

Прировняем производную к -1: $1 - 2e^{-2x} = -1$

$$2e^{-2x} = 2$$

$$e^{-2x} = 1$$

$$x = 0$$

Уравнение касательной: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение касательной: $y =1-1(x-0) = 1-x$

Ответ: $y = 1-x$.

Пример 3. Для параболы $y = x^2 - 4x$ написать уравнение касательной в точке с абсциссой, равной 1.

Решение. Уравнение касательной имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

1.Найдём производную функции: $y' = 2x - 4$

2. Найдём значение производной в точке $x_0 = 1$: $y'(1) = 2\cdot 1 - 4 = -2$

3. Найдём значение функции в точке $x_0 = 1$: $y(1) = 1 - 4 = -3$

4. Подставим полученные числа в формулу касательной:

$y = -3 + (-2)(x - 1)$

$y = -3 - 2x + 2$

$y = -2x - 1$

Ответ: уравнение касательной имеет вид $y = -2x - 1$

2.Физический смысл производной.

$V = S'$; $a = V' = S''$

Если материальная точка движется прямолинейно по закону s (t), то производная функции $y = s(t_0)$ выражает мгновенную скорость материальной точки в момент времени t_0, т.е. $v = s'(t_0)$.

Замечание: при решении задач будем считать, что если $s'(t_0) = 0$, то в момент времени t_0 точка останавливается.

Пример 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где $x(t)$ — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени t = 9с**.**

Решение.

1.Найдем производную функции: $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$

$x' = 12t - 48$

2. Найдем значение производной в точке $t = 9$: $x' = 60$

Ответ: 60 м/с.

Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x = t^2 – 13t + 23$, где x(t) - расстояние от точки отсчета в метрах**,** t - время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

Решение.
Если нам известна скорость точки в некий момент времени, следовательно известно значение производной в точке t_0. Найдем производную функции
$x = t^2 – 13t + 23$, $x^{|} = 2t - 13$
По условию, скорость точки равна 3 м/с, значит, значение производной в момент времени t_0 равно 3. Получаем уравнение:
$2t – 13 = 3$
$2t = 16$
$t =8$
Ответ: 8
Пример 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x = \frac{1}{3}t^3 – 3t^2 – 5t + 3$, где x(t) - расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?
Решение. Найдем производную функции: $x = \frac{1}{3}t^3 – 3t^2 – 5t + 3$, $x^{|} = t^2 – 6t -5$.
По условию, скорость точки равна 2 м/с, значит, значение производной в момент времени t_0 равно 2. Получаем уравнение: $t^2 – 6t -5 = 2$
Решим его:
$t^2 – 6t -5 = 2$
$t^2 – 6t -7 = 0$
$t_1 = 7$ $t_2 = -1$ – не подходит по смыслу задачи: время не может быть отрицательным.
Ответ: 7
Пример 4. Прямолинейное движение точки совершается по закону:
$S = (t^3 — 2)$ м. Определить ускорение в момент t = 10 сек.
Решение. Ускорение $a = V^{//}$. Дифференцируя функцию $S = t^3 — 2$, находим $V^{//}= 6t$.
Следовательно, $a = 6t = 6·10 = 60$; $a = 60$ м/сек^2.
Пример 5. Если движение неравномерное, то сила F, производящая его, непостоянна, каждому моменту времени t соответствует определенное значение действующей силы F, и сила, таким образом, есть функция времени t, F=f(t).
По закону Ньютона, в каждый момент времени действующая сила F равна произведению массы т на ускорение а, то есть F=ma, или f(t) = ma.
При прямолинейном движении $a = V^{//}$, поэтому $f(t) = m V^{//}$.
Зная уравнение прямолинейного движения, можно дифференцированием найти значение действующей силы в каждый момент времени.
Пример 6. Определить силу, под действием которой материальная точка совершает прямолинейные колебания по закону $S = A·\sin(\omega t + \omega_0)$.
Решение. $f(f) = m V^{//}$, поэтому находим вторую производную функции:
$S = A·\sin(\omega t + \omega_0)$, $ds/dt = A·\cos(\omega t+\omega_0)·\omega$**,**
$V^{//}= - A·\sin (\omega t + \omega_0) ·\omega^2 = - s\omega^2 = - \omega^2 s$; $f(t) = - m\omega^2 s$,
то есть рассматриваемые колебания совершаются под действием силы, пропорциональной перемещению s и направленной в противоположную сторону.
Упражнения для самостоятельной работы:

Ознакомительный уровень.

1.Составить уравнение касательной:

$y = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$.

2. Составить уравнение нормали:

$y = x^2 - 2x$, $x_0 = 0$.

Репродуктивный уровень.

3.Найти скорость движения точки и ускорение через 2 секунды от начала движения, если формула для вычисления пути равна: $S = 2t^3 + 2t^2 - 3t + 4$ м.

Продуктивный уровень.

4.Найти точки графика функции $y = e^x + e^{-x}$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = \frac{3}{2}x$.

2.3. Практическая работа № 3

Нахождение промежутков монотонности и экстремумов функции.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 1.1 «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»;
- умение исследовать функцию с помощью производной;
- развитие общих компетенций по ОК 2.
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: правила вычисления производных 1 и высших порядков

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Задание для практической работы
и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

1.Монотонность функции.

Под монотонностью понимают возрастание и убывание функции.

Алгоритм нахождения промежутков монотонности функции.

1.Найти область определения функции.
2.Найти производную функции.
3.Найти корни производной и точки, в которых производная не существует.
4.Наносим полученные точки на область определения функции.
5.Определяем знаки **производной** в каждом из полученных промежутков.
6.а) Если **производная** положительна на промежутке (а; в), то функция возрастает на промежутке (а; в).
б) Если **производная** отрицательна на промежутке (а; в), то функция убывает на промежутке (а; в).

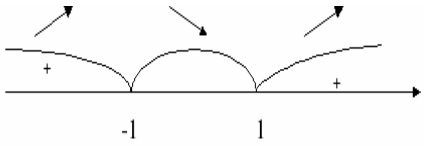
Пример 1: Исследовать на возрастание и убывание функцию: $y = x^3 – 3x + 2$

Решение:

Находим производную: $y^/ = 3x^2 - 3$**.** Производная обращается в нуль при значениях: $3x^2 – 3 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2=-1$



Следовательно, функция f(x) возрастает на промежутке $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, функция убывает на промежутке (-1;1).

Пример 2. Найти промежутки возрастания и убывания функции: $y = xe^{-3x}$

Решение: Найдем производную функции: $y' = e^{-3x} - 3xe^{-3x}$.

Приравняем производную к нулю: $e^{-3x}(1-3x) = 0$, откуда $x = \frac{1}{3}$.

При $x < \frac{1}{3}$, $y' > 0$, следовательно, при $x < \frac{1}{3}$, функция возрастает, а при $x > \frac{1}{3}$, $y' < 0$, следовательно, при $x > \frac{1}{3}$, функция убывает.

Пример: Найти промежутки монотонности функции $y = x^4 - x^3$.

1. $D(y) = R$
2. $y'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$
3. $y'(x) = 0$, $x = 0$ и $x = 3/4$
4. При $x \geq \frac{3}{4}$ и при $x \leq 0$ производная положительна, следовательно функция возрастает на этих промежутках; при $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$ производная отрицательна, следовательно функция убывает на этом промежутке.

Пример 3. Найти интервалы возрастания функции: $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

Найдите интервалы, принадлежащие области определения функции, на которых ее производная положительна.

Решение: Область определения функции: любое действительное число, кроме 1 и -1.

Найдем производную и исследуем ее знак: $y' = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$

С учетом области определения интервалы возрастания: $(0;1) \cup (1;\infty)$

Ответ: $(0;1) \cup (1;\infty)$

2.Экстремумы функции.

Алгоритм нахождения экстремумов функции.

1.Найти область определения функции.

2.Найти производную функции.

3.Найти корни производной и точки, в которых производная не существует.

4.Наносим полученные точки на область определения функции.

5.Определяем знаки производной в каждом из полученных промежутков.

6.а) Если производная положительна на промежутке (а; в), то функция возрастает на промежутке (а; в).

б) Если производная отрицательна на промежутке (а; в), то функция убывает на промежутке (а; в).

7.Если при переходе через точку x_0 производная изменяет свой знак с «-»
на «+», то точка **x_0 – точка минимума**. Если при переходе через точку x_0 производная изменяет свой знак с «+» **на «-«,** то x_0 – **точка максимума.**
8.Чтобы найти экстремумы, необходимо найти значения функции в точках экстремумов.

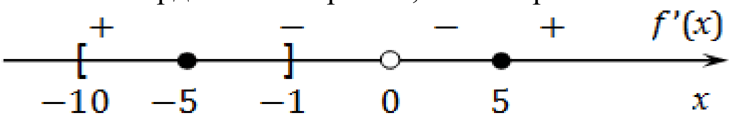
Пример 1. Исследовать функцию на экстремум: $y = x^2 – 4x$.
1.Находим область определения: любое действительное число.
2. Находим производную функции: $y^/=2x – 4$
3. Находим корни производной: $2x – 4 = 0$, $2x = 4$, $x = 2$.
4. Определяем знаки производной при $x< 2$ и при $x > 2$:
при $x< 2$, $y^/< 0$, при $x > 2$, $y^/> 0$, значит при переходе через x=2 прпоизводная функции изменяет свой знак с минуса на плюс. По теореме x=2 – точка минимума. Определим минимум функции: $y_{min}(2) = 4 – 8 = -4$.
Ответ: $y_{min}(2) = -4$.
Пример 2.
Найдите точку максимума функции на отрезке [−10; −1]:

$$y = \frac{x^2 - 8x + 25}{x}$$

Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 8x + 25}{x}\right)' = \dots = \frac{x^2 - 25}{x^2}$$

Поскольку это дробно-рациональная функция, приравниваем к нулю числитель: $x^2 −25=0$; $x_1 = 5$; $x_2 = −5$.
Получили два корня. Теперь приравниваем к нулю знаменатель:
$x^2 =0$;
$x = 0$.
Получили $x = 0$ — корень второй кратности. При переходе через него знак производной не меняется. Отмечаем точки $x =−5$; $x =0$;
$x = 5$ на координатной прямой, а затем расставить знаки и границы.



Очевидно, что внутри отрезка останется лишь одна точка $x = −5$,в которой знак производной меняется с плюса на минус. Это и есть точка максимума.
Ответ: -5
Пример 3. Исследовать на экстремум функцию: $y = \frac{x+2}{x-2}$.
1.Область определения функции: любое числор, кроме $x = 2$.
2. Найдём производную функции: $y^/ = \frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}$.
3. Находим корни производной и точки, в которой производная не существует: корней нет, так как числитель не равен нулю.
Производная не существует, когда знаменатель равен нулю, следовательно $x_{1,2} = 2$.
4.Производная имеет знак минус и правее 2, и левее 2. Имеем, что производная не меняет свой знак при переходе через критические точки.
Ответ: функция экстремумов не имеет.
Упражнения для самостоятельной работы:
Ознакомительный уровень.

1.Исследовать функцию на монотонность: $y = -x^2+12x$.
2.Найти точки экстремумов
функции: $y = 3x^2-6x+15$.
Репродуктивный уровень.
3.Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y = \frac{x+4}{x+8}$
Продуктивный уровень.
4. Найти промежутки возрастания и убывания функции: $y= \ln x^3$.
5. Определить экстремумы функции: $y = \frac{3x}{x^2+1}$.

2.4.Практическая работа № 4.

Построение графиков функций при помощи производной.
Цели работы:
- обобщение и систематизация материала по теме 1.1 «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»;
- сформировать умение выполнять построение графика функции, умение исследовать функцию с помощью производной;
- развитие общих компетенций по ОК 2.
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая
Студент должен
знать: правила вычисления производных 1 и высших порядков
уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе
1. Монотонность функции;
2. Экстремумы функции;
3. Алгоритм построения графика функции.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Рассмотрим примеры решения типовых задач на применение производной.
Пример 1. Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.
Решение:
1) Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$.
2) Сумма этих чисел равна $x + \frac{36}{x}$.
3) По условия задачи x – положительное число. Итак, задача сводится к нахождению значения x – такого, при котором функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x > 0$.
4) Найдем производную: $f'(x) = 1 – 36/x^2 =((x + 6)(x – 6)) / x^2$.

5) Стационарные точки $x_1 = 6$, $x_2 = -6$. На интервале $x > 0$ есть только одна стационарная точка $x = 6$. При переходе через точку $x = 6$ производная меняет знак «–» на знак «+», и поэтому $x = 6$ – точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале $x > 0$ функция $f(x) = x + 36/x$ принимает в точке $x = 6$ (это значение $f(6) = 12$).
Ответ: $36 = 6 \cdot 6$.
Пример 2.
1.Функция спроса имеет вид Q=100 – 20p, постоянные издержки TFC составляют 50 денежных единиц, а переменные издержки TVC на производство единицы продукции – 2 денежные единицы. Найти объём выпуска, максимизирующий прибыль монополиста.
Решение:
Прибыль есть выручка минус издержки:
П=TR – TC, где TR= p ·Q; TC=TFC+TVC.
Найдём цену единицы продукции: $20p = 100 – Q \Rightarrow p = 5 - \frac{Q}{20}$.
Тогда: П=(5 – Q/20)Q – (50 + 2Q)= – Q2 + 60Q - 1000 ® max
Найдём производную: П'(Q)= –2Q+60.
Приравняем производную к нулю: $-2Q+60=0 \Rightarrow Q=30$.
При переходе через точку Q=30 функция П(Q) меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума, и в ней функция прибыли достигает своего максимального значения. Таким образом, объём выпуска, максимизирующий прибыль, равен 30 единицам продукции.
Пример 3. Марсель решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал другу юности Денису шкатулку из драгоценного металла. В мастерскую он принес кусок листа из этого металла размером 80 Х 50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.
Решение: Обозначим через x длину стороны вырезаемого квадрата. Легко видеть, что $0<x<25$.
Объем при этом у коробки: $V = x (80-x) (50 – 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

$V' = 12x^2 - 520x + 4000 = 0 \quad x_1 = 100:3 = 33\frac{1}{3}, \quad x_2= 10$.
x_1- посторонний корень по смыслу задачи.
$x_2= 10$ – единственное решение – высота,
80 – 20 = 60 – длина, 50 – 20 = 30 – ширина.
$V = 10 \cdot 60 \cdot 30 = 18000$(см³).

Задача 1.
Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график (с помощью производной первого и второго порядков)

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

1) Область определения:

$$D(y)=(-\infty;+\infty)$$

$$2)\ y(-x)=\frac{4(-x)}{4+(-x)^2}=-\frac{4x}{4+x^2}=-y(x),$$

т.е. функция является нечётной.

3) $y(0)=0$

$(0;0)$ - точка пересечения графика с оями координат.

4) Функция всюду непрерывна в своей области определения. Вертикальных асимптот нет.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{4+x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}}{\frac{4}{x^2}+1}=0$$

$y=0$ - горизонтальная асимплота.

$$5)\ y'=\frac{4(4+x^2)-4x*2x}{(4+x^2)^2}=$$

$$=\frac{16+4x^2-8x^2}{(4+x^2)^2}=\frac{16-4x^2}{(4+x^2)^2}=0$$

$$x^2=4\Rightarrow x_1=2; x_2=-2$$

$$y'(-3)=\frac{16-36}{(4+9)^2}<0,\qquad y'(0)=\frac{16}{16}>0$$

$$y'(3)=\frac{16-36}{(4+9)^2}<0,\qquad y(-2)=\frac{-8}{4+4}=-1$$

Упражнения для самостоятельного решения.

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график (с помощью производной первого и второго порядков)

2.1. $y=4x/\left(4+x^2\right);$ 2.2. $y=\left(x^2-1\right)/\left(x^2+1\right);$

2.3. $y=\left(x^2+1\right)/\left(x^2-1\right);$ 2.4. $y=x^2/\left(x-1\right);$

2.5. $y=x^3/\left(x^2+1\right);$ 2.6. $y=\left(4x^3+5\right)/x;$

2.5. Практическая работа № 5

Вычисление неопределенных интегралов.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала Тема 1.2. Основы интегрального исчисления сформировать умение находить неопределенный интеграл;
- развитие общих компетенций по ОК 2. воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: основные методы интегрирования

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Неопределенный интеграл;
2. Метод непосредственного интегрирования;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Задача 1

Найти неопределенные интегралы:

Справочный материал.

1. $\int X^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ +c
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$ +c
3. $\int (kx+b)\,dx = \frac{1}{k}\ln(kx+b)$ +c
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$ +c
5. $\int e^x\,dx = e^x$ +c
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x$+c
7. $\int \cos x\,dx = \sin x$+c
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}x$+c
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}x$+c
10. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \mathrm{arctg}x$+c
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$+c
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$+c
13. $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$
14. $\int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx$+c
15. $\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx$+c
16. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}$+c
17. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}$+c
18. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}|$+c

1.Вычисление неопределённых интегралов.

Примеры. Найти интегралы:

1. $\int(3x^2 + 4x – 6)\,dx = x^3 + 2x^2 – 6x + C$

2. $\int\left(\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{1}{5}\right)dx$; 3. $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}+\frac{5}{x^2}\right)dx$; 4. $\int\frac{5x^3+2x-3}{2x\sqrt{x}}dx$.

Решение.

2. $\int\left(\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{1}{5}\right)dx=\int\frac{3}{2}x^2dx+\int 6x\,dx-\int\frac{1}{5}dx=$

$=\frac{3}{2}\int x^2dx+6\int x\,dx-\frac{1}{5}\int dx=\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-\frac{1}{5}x+C=\frac{x^3}{2}+3x^2-\frac{x}{5}+C$.

3. $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}+\frac{5}{x^2}\right)dx=\int\left(2x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{5}{4}}+5x^{-2}\right)dx=$

$=2\int x^{-\frac{2}{3}}dx+\int x^{-\frac{5}{4}}dx+5\int x^{-2}dx=2\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}}+5\frac{x^{-1}}{-1}+C=6\sqrt[3]{x}-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}-\frac{5}{x}+C$.

4. Предварительно числитель подынтегральной функции почленно разделим на знаменатель, затем последовательно применим формулы:

$\int\frac{5x^3+2x-3}{2x\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{5}{2}x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}\right)dx=\frac{5}{2}\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{3}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx=$

$=\frac{5}{2}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x^3+2x+3}{\sqrt{x}}+C$.

5. $\int\left(-\frac{5}{x^3}\right)dx=-5\int x^{-3}dx=-5\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=-5\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{5}{2x^2}+C$;

6. $\int\frac{2dx}{3x\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\int x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=\frac{4}{-3\sqrt{x}}+C$;

6. $\int\frac{3dx}{4}=\frac{3}{4}\int 1dx=\frac{3}{4}\int x^0dx=\frac{3}{4}\frac{x^{0+1}}{0+1}+C=\frac{3}{4}x+C$;

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Задача 1.

Найти неопределенные интегралы. В пунктах а и б результаты проверить дифференцированием.

1.1. а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2xdx$; б) $\int arctg\sqrt{x}dx$;

в) $\int\frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

1.2. а) $\int\frac{xdx}{\left(x^2+4\right)^6}$; б) $\int e^x\ln\left(1+3e^x\right)dx$;

в) $\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; г) $\int\frac{dx}{\sin x+tgx}$.

1.3. а) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x3^x dx$;

в) $\int\frac{\left(3x-7\right)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

1.4. а) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(3tgx+1\right)}$; б) $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx.$

1.5. а) $\int \frac{\cos 3x dx}{4+\sin 3x}$; б) $\int x^2 e^{3x} dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; г) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$.

1.6. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x \arcsin \frac{1}{x} dx$;

в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$; г) $\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)dx}{\left(\sqrt{x}+4\right)\sqrt[4]{x^3}}$.

Задача 2

Скорость прямолинейного движения тела в любой момент времени t равна $V=3t^2+4t$ (м/с). Найти расстояние, пройденное телом в любой момент времени от начала отсчета, если через 2 с оно равно 15 м.

2.6. Практическое занятие №6

Вычисление неопределенных интегралов методом подстановки

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала Тема 1.2. Основы интегрального исчисления сформировать умение находить неопределенный интеграл;
- развитие общих компетенций по ОК 2. воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: основные методы интегрирования, метод подстановки

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Неопределенный интеграл;

2. Метод непосредственного интегрирования;

3.Подстановка в неопределённом интеграле;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы

и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

2.Метод подстановки.

Всякая формула интегрирования сохраняет вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от неё, т. е. если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то и $\int f(u)du = F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от х.

Это правило очень важно. Основная таблица интегралов в силу этого правила оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией её. Покажем на примерах как пользоваться этим методом.

Примеры:

1. $$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{5}} = \left| \begin{matrix} \frac{x}{5} = t \\ \frac{dx}{5} = dt \\ dx = 5dt \end{matrix} \right| = 5\int \frac{dt}{\cos^2 t} = 5tgt + C = 5tg\,\frac{x}{5} + C$$.

2. $$\int e^{-7x}dx = \left| \begin{matrix} t = -7x \\ dx = -7dx \\ dx = -\frac{dt}{7} \end{matrix} \right| = \int e^t\left(-\frac{dt}{7}\right) = -\frac{1}{7}\int e^t dt = -\frac{1}{7}e^t + C = -\frac{1}{7}e^{-7x} + C$$.

3. $$\int (x+1)^{11}dx = \left| \begin{matrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int t^{11}dt = \frac{t^{12}}{12} + C = \frac{(x+1)^{12}}{12} + C$$

4. $$\int \cos(2-x)dx = \left| \begin{matrix} t = 2-x \\ dt = -dx \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = \int \cos(-dt) = -\int \cos t dt = -\sin t + C = -\sin(2-x) + C$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}} = \left| \begin{matrix} t = 3x+2 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{3\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2} + C = \frac{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}{2} + C$$

6. $$\int e^{x^2}2xdx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{matrix} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

7. $$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+1} = \left| \begin{matrix} t = x^2+3x+1 \\ dt = (2x+3)dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2+3x+1) + C$$

8. $$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \left| \begin{matrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

1) $\int \cos^2 2x\,dx$ 2) $\int x\sqrt[3]{5x^2+1}\,dx$ 3) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$

4) $\int \frac{x^4dx}{x^5+1}$ 5) $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{3}{x}}dx$ 6) $\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$

7) $\int x^3\sin 3x^4dx$ 8) $\int (3x^2-x+2)(6x-1)dx$ 9) $\int e^{x^2+5x+1}(2x+5)dx$

10) $\int \frac{7xdx}{1-x^2}$ 11) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$ 12) $\int \frac{4x+1}{2x^2+x}dx$

13) $\int x^2 6^{1-x^3}\,dx$

14) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}}dx$

15) $\int \frac{2x^2dx}{\cos^2 x^3}$

16) $\int \frac{2\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{2x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$

18) $\int \frac{x+4}{x^2+1}dx$

19) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

20) $\int \frac{2x-3}{4+3x-x^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\left(6+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[3]{x^2}}$

22) $\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$

23) $\int \frac{3dx}{x\ln^2 x}$

24) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x dx$

25) $\int \frac{ctgx}{\sin^2 x}dx$

26) $\int \frac{\sin x}{\cos^7 x}dx$

27) $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$

28) $\int tgxdx$

29) $\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

30) $\int \frac{arctgx}{1+x^2}\,dx$

2.7. Практическое занятие №7.
Вычисление определенных интегралов

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала Тема 1.2. Основы интегрального исчисления; сформировать умение находить неопределенный интеграл; умение вычислять определённый интеграл и применять его к решению практических задач;
- развитие общих компетенций по ОК 2. воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: формулу Ньютона-Лейбница; методы интегрального исчисления.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Формула Ньютона-Лейбница;
2. Свойства определенного интеграла;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Свойства определённого интеграла.

1.Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3.При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4.Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

5.Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Для вычисления определенного интеграла от функции f(x), в том случае если можно найти соответствующую первообразную F(x), служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Примеры: Вычислить определенные интегралы.

$$1.\int_{-1}^{0} (3x^2+1)dx = (x^3+x)\Big|_{-1}^{0} = 0-(-1-1) = 2$$

$$2.\int_1^2 \frac{3dx}{x} = 3\ln x\Big|_1^2 = 3(\ln 2 - \ln 1) = 3\ln 2$$

$$3.\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{\cos^2 t} = 2tgt\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(tg\frac{\pi}{4} - tg0) = 2$$

§2. Вычисление площадей плоских фигур.

1.Пусть f(x)>0, x = a, x = b, y =0, тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями,

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

находится по формуле:

2.Пусть f(x) <0, x=a, x=b, y=0, тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями,

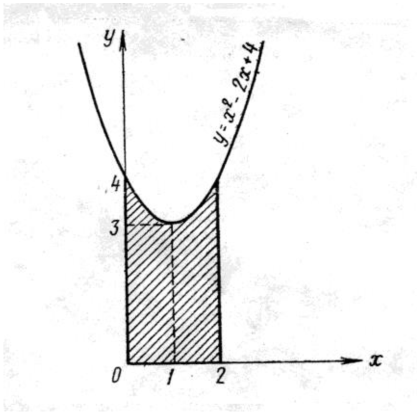
$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

находится по формуле:

3.Если функция f(x) конечное число раз меняет знак на отрезке [a; b], то формула каждый раз составляется индивидуально с учетом формул (1) и (2).
4. Пусть f(x) >g(x) на отрезке [a; b], тогда площадь фигуры, ограниченной функциями f(x), g(x), x = a, x=b определяется по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Пример1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 4$, x=0, x=2, y=0
Решение:

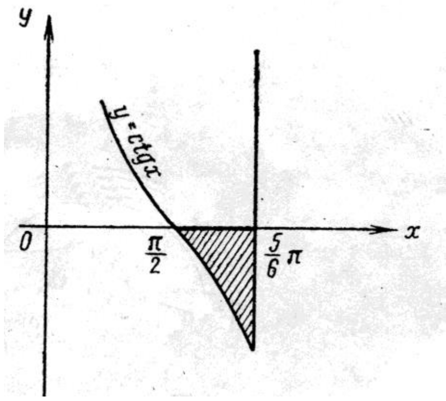


Фигура, площадь которой нужно вычислить, является криволинейной трапецией, ограниченной сверху кривой, снизу осью Ox, слева осью Oy, справа прямой x=2.

$$S = \int_0^2 (x^2 - 2x + 4)dx = (\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x)\Big|_0^2 = 6\frac{2}{3}(кв.ед.)$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = ctgx, x = \frac{5}{6}\pi, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$$

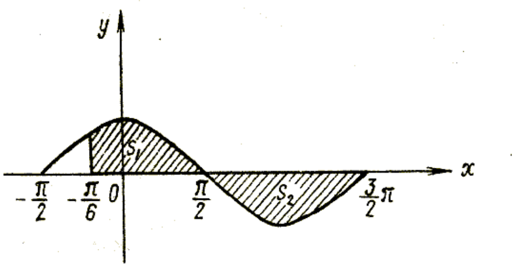


Получилась криволинейная трапеция, ограниченная сверху осью Ox, снизу котангенсоидой y = ctgx, справа прямой $x = \frac{5\pi}{6}$. Для решения задачи применяем вторую формулу, так как криволинейная трапеция находится ниже оси Ox.

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} ctg dx=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\cos x dx}{\sin x}=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{matrix}\right|\begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=\dfrac{1}{2}\end{matrix}\Bigg|=-\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t}=-\ln t\Big|_{1}^{\frac{1}{2}}=-\ln\frac{1}{2}+\ln 1=\ln 2+0=\ln 2.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\cos x, x=-\frac{\pi}{6}, x=\frac{3}{2}\pi, y=0.$$

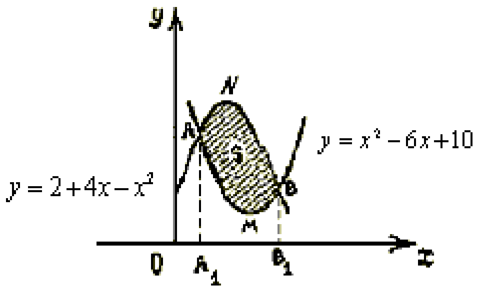


На чертеже видно, что фигура, ограниченная заданными линиями, состоит из двух криволинейных трапеций, одна из которых находится над, а другая под осью абсцисс.

$$S=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos x dx=\sin x\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{6})-(\sin\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{\pi}{2})=$$

3,5

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:



Для построения парабол выделим в правых частях их уравнений полные квадраты:

$$y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1;$$

$$y=2+4x-x^2=-(x-2)^2+6.$$

Найдём точки пересечения парабол: Левые части уравнений равны, значит равны и правые:
$$\begin{cases}y=x^2-6x+10,\\ y=2+4x-x^2,\end{cases}$$

$$x^2-6x+10=2+4x-x^2$$

$$2x^2-10x+8=0$$

$$x^2-5x+4=0$$

По теореме Виета, определяем: $x_1=1; x_2=4.$

Для решения задачи воспользуемся четвёртой формулой:

$$S=\int_1^4((2+4x-x^2)-(x^2-6x+10))dx=\int_1^4(2+4x-x^2-x^2+6x-10)dx=$$

$$=\int_1^4(-2x^2+10x-8)dx=(-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x)\Big|_1^4=-\frac{2}{3}\cdot 64+5\cdot 16-8\cdot 4-$$

$$-(-\frac{2}{3}+5-8)=-42\cdot\frac{2}{3}+80-32+\frac{2}{3}-5+8=9(ед^2)$$

Задача 2

Шкив вращается вокруг оси под действием момента сил *M*, который меняется с течением времени по закону *M=At, A*- известная постоянная величина. Найти угловую скорость w и угол поворота jшкива в любой момент времени, если в начальный момент шкив был неподвижен. Момент инерции шкива равен I.

Используем для решения основное уравнение динамики вращения тела

$$I\frac{d\omega}{dt}=M.$$

Отсюда $\frac{d\omega}{dt}=\frac{A}{I}\cdot t$.

Угловую скорость находим интегрированием последнего выражения, т.е.

$$\omega(t)=\int\frac{A}{I}t\,dt=\frac{A}{I}\int t\,dt=\frac{A}{2I}t^2+C.$$

Постоянную интегрирования *C* найдем из начальных условий, т.е. из условия, что при *t*=0, w=0. Получаем, что *C*=0. Таким образом, в любой момент времени угловая скорость

$$\omega(t)=\frac{A}{2I}t^2 .$$

Учитывая, что угловая скорость и угловой путь связаны формулой

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt} ,$$

найдем угловой путь

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{A}{2I}t^2 ,$$

$$\varphi=\int\frac{A}{2I}t^2dt=\frac{A}{2I}\int t^2dt=\frac{A}{6I}t^3+C_1,$$

где *C*- постоянная интегрирования, которая вновь определяется из начального условия: при *t*=0, w=0, значит, C_1=0. Следовательно, в любой момент времени равен угол поворота шкива

$$\varphi(t)=\frac{A}{6I}t^3.$$

2. Скорость тела через *t* с после начала движения равна *V*=(4*t*+5) м/с. Определить путь, пройденный телом за *t* секунд после начала отсчета.

Учтя, что $V=\frac{dS}{dt}$, получим $\frac{dS}{dt}=(4t+5)$. Тогда

$$S=\int(4t+5)dt=4\int t\,dt+5\int dt=\frac{4}{2}t^2+5t+C=2t^2+5t+C .$$

Постоянную интегрирования найдем из начального условия, что при *t*=0 тело покоилось, следовательно, *C*=0. Тогда окончательно имеем

$S=2t^2+5t$ (м).

Применение определённого интеграла при решении физических задач.

1. **Задача о вычислении пути**.
Пусть материальная точка движется прямолинейно с некоторой скоростью $V_0 = V(t)$.Требуется найти путь, который пройдет эта точка за промежуток времени от t = a до t = b.Если скорость постоянна, то $S = V_0(b-a)$. Если скорость непостоянна поступают следующим образом: промежуток времени [а; в] разбивают точками $t_0 = a, t_1,\ldots, t_{n-1}, t_n = b$ на n отрезков одинаковой длины, которая определяется формулой: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, где i = 1, 2, … , n.Выбрав произвольную точку с на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, составим сумму: $\sum_{i=1}^{n} V(C_i)\Delta t_i$.Это приближение будет тем лучше, чем мельче отрезки разбиения, $S = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V(C_i)\Delta t_i$. А этот предел есть определенный интеграл от функции V(t) на отрезке $[a;b]$, то есть: $S = \int_a^b V(t)dt$.

Пример 1. Тело движется прямолинейно со скоростью $V(t) = (3t^2 + 4t + 1)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 3 секунды.

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 4t + 1)\,dt = (t^3 + 2t^2 + t)\Big|_2^3 = 48 \text{ м.}$$

Пример 2. Тело движется прямолинейно со скоростью $V(t) = (t + 6t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за третью секунду.

$$S = \int_2^3 (t + 6t^2)\,dt = \left(\frac{1}{2}t^2 + 2t^3\right)\Big|_2^3 = 40{,}5 \text{ м.}$$

Пример 3. Определить максимальную высоту подъема камня, брошенного вертикально вверх со скоростью $(18t+3t^2)$ м/с.

1.Определим время движения тела от начала движения до остановки:

$18t - 3t^2 = 0$

$6t - t^2 = 0$

$t(6 - t) = 0$

$t_1 = 0 \qquad t_2 = 6$

2.Найдем высоту подъема:

$$H = \int_0^6 (18t - 3t^2)\,dt = 9t\Big|_0^6 - t^3\Big|_0^6 = 9(36-0) - (216-0) = 324 - 216 = 108 \text{ (м).}$$

Ответ: 108 метров.

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

320. $y = x^2, x = 8, x = 0, y = 0.$ 330. $y = 3 + 2x - x^2, y = 0.$

321`. $y = 3x^4 - 4x^3, y = 0.$

322 $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = a, a > 0, y = 0.$

323 $y = tgx, x = \frac{x}{4}, y = 0, x = 0.$

329 $y = 3 - 2x, y = x^2.$

325. $y = x^3 - x^2, y = 0.$

326 $y = -x^2 + 8x - 6, y = x.$

331 $y = x + x^2, x = 1, x = 4, y = 0.$

332. $y = e^x, x = 1, x = 0, y = 0.$

333. $y = 4x - x^2, y = 0.$

334. $y = 3x^2 - 2x, y = 0.$

335. $y = x^2 + 1, y = x + 3.$

338. $y = 2x - x^2, y = -x.$

339) Скорость движения точки изменяется по закону V= ($3t^2$ + 2t + 1) м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.
340) Скорость движения точки V = ($9t^2$ - 8t) м/с. Найдите путь, пройденный точкой за четвёртую секунду.
341) Скорость движения точки V = (12t – $3t^2$) м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
342) Скорость движения точки V = ($6t^2$ + 4) м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

2.8 Практическое занятие №8
«Решение дифференциальных уравнений

Цели работы:
- обобщение и систематизация материала по теме 1.3 «Дифференциальные уравнения»;
- сформировать умение решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;
- развитие общих компетенций по ОК 2. воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая
Студент должен
знать: приемы решения дифференциальные уравнения
уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности
Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе
1. определение дифференциального уравнения;
2. уметь разделять переменные в уравнении;
Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению Определение 1. Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется уравнение вида: p (y)dy = q (x)dx ,
в котором левая часть зависит только от одной переменной, а

правая – только от другой.
Решаются дифференциальные уравнения с разделенными переменными интегрированием обеих частей:
$\int p(y)dy = \int q(x)dx$ (2.2.)
Здесь под интегралами понимаются соответствующие первообразные.
Пример 1 Найти решение дифференциального уравнения
$dy - dx = 0$
Решение: Перенесем слагаемое
из левой части в правую, получим дифференциальное уравнение:
$dy = dx$,
которое является уравнением с разделенными переменными.
Интегрируя обе части последнего уравнения, будем иметь
$\int dy = \int dx$, $y = x + C$
Задачи (задания) для самостоятельного решения.

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
2. $2x\sqrt{1-y^2} \cdot dx + y \cdot dy = 0$.
3. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$.
4. $x \cdot \left(1+y^2\right) + y \cdot y' \cdot \left(1+x^2\right) = 0$.
5. $\sqrt{3+y^2} \cdot dx - y \cdot dy = x^2 \cdot y \cdot dy$.
6. $\left(y^2 + x \cdot y^2\right) + \left(x^2 - y \cdot x^2\right) \cdot y' = 0$.
7. $\left(e^{3x} + 7\right) \cdot dy + y \cdot e^{3x} \cdot dx = 0$.
8. $y' \cdot y \cdot \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.
9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
10. $y' = e^{x-y}$.
11. $y\left(4+e^x\right)dy - e^xdx = 0$.
12. $\sqrt{4-x^2} \cdot y' + xy^2 + x = 0$.

2.9. Практическая работа № 9

«Действия над матрицами»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.1 «Матрицы»;
- сформировать умение выполнять действия над матрицами;

- развитие общих компетенций по ОК 2. воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать:

закон ассоциативности

закон дистрибутивности

закон коммутативности

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Сложение матриц;
2. Умножение матрицы на число;
3. Свойство ассоциативности.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы
и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Задача 1.

Найти матрицу, противоположную матрице A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения противоположной матрицы умножаем матрицу А на к = -1: - A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Задача 2.

Найти линейную комбинацию 3A - 2B, если

A = $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала находим произведение А на $к_1 = 3$ и В на $к_2 = -2$:

3A = $\begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix}$, - 2B = $\begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем сумму полученных матриц:

3A - 2B = $\begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}$.

Задача 3.

Найти произведение AB, если A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Решение. } AB = \begin{pmatrix} 0\cdot3+(-1)\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot1+(-1)\cdot1+2\cdot0 \\ 2\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+0\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+7\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+7\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.

Найти произведение AB:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Ответ: $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Ответ: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ -2 & -1 & 0 \\ 12 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Задача 5.

Вычислить $C = A^2 + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 6.

Найти AB - BA, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 6 & -4 & -5 \\ 6 & -2 & -4 \\ 9 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача 7.

Найти AE, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Задача 1.

Вычислить линейные комбинации матриц:

а) 2A - B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

б) 3A + 2B, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 2.

Найти произведение AB:

а) A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

б) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Задача 3. Найти $3A \cdot 2B$, если A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 4. Найти ЕА, если Е = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

2.10. Практическая работа № 10 «Вычисление определителей»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.2 «Определители»;
- сформировать умение находить определитель, ранг матрицы;
- развитие общих компетенций по ОК 2. воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: свойства определителя

теорему о разложении определителя

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1.Определитель матрицы;

2. Ранг матрицы;

3. Свойства определителя.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

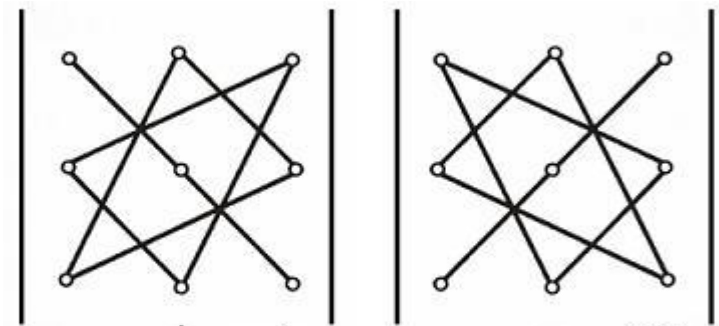
Задачи для решения на уроке

Определение. Определителем третьего порядка, составленным из чисел $a_1; b_1; c_1; a_2; b_2; c_2; a_3; b_3 c_3$ называется число, определяемое равенством:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить определитель второго порядка, необходимо из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение побочной диагонали.

Существуют ещё ряд правил для вычисления определителей третьего порядка, например вот это: каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трёх его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определёнными знаками: со знаком плюс – три члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали (рис 1); со знаком минус – три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали (рис 2).



\+ рис. 1 — рис. 2

Пример: Вычислить определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$

3(-5+16)- 2(1+32)+2(2+20)=33-66+44=11

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Составить определители и вычислить:

1. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 11 \\ 2x - y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 2z = 9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2y + Z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ 2x - 5y - 3z = -17 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

2.11. Практическая работа №11
Решение систем методом Крамера.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.3 «Системы линейных уравнений»;
- сформировать умение решать системы уравнений;

- развитие общих компетенций по ОК 2. воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: метод Крамера для решения системы линейных уравнений.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Метод Крамера;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

1.Определители второго порядка. Решение линейных систем методом Крамера.

1.Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется определителем 2 порядка и обозначается

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$**, где $a_1; b_2$ - элементы главной диагонали, $a_2; b_1$ - элементы побочной диагонали.**

Чтобы вычислить определитель 2 порядка, необходимо из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов побочной диагонали.

2.Метод Крамера для систем 2 порядка: $\begin{cases} a_1x + в_1y = c_1 \\ a_2x + в_2y = c_2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & в_1 \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix}$ $\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & в_1 \\ c_2 & в_2 \end{vmatrix}$ $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ - формулы Крамера

1. $\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 32 + 33 = 65$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 55 - 16 = 39 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{65}{13} = 5 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3$$

Ответ: (5; 3).

2. Определители 3 порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

3(-5+16) - 2(1+32) + 2(2+20) = 33-66+44=11

3. Решение линейных систем третьего порядка методом Крамера.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$ $\quad y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$ $\quad$ **z=** $\dfrac{\Delta z}{\Delta}$ - формулы Крамера

Пример 1.

$$\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 32 \\ 5x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + 3z = 14 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 43, \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 32 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 32$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 7 & 32 & 5 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = -43, \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 32 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{86}{43} = 2 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{43}{43} - 1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{129}{43} = 3$$

Ответ: (2; -1; 3).

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Решить системы методом Крамера:

1) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 11 \\ 2x - y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x-5y-3z=-17 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$

2.12. Практическая работа №12

Решение систем методом Гаусса.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.3 «Системы линейных уравнений»;
- сформировать умение решать системы уравнений;
- развитие общих компетенций по ОК 2. воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: метод Гаусса для решения системы линейных уравнений.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Метод Крамера;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Задача 1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9 \\ x_1-x_2+3x_3=2 \\ 3x_1-6x_2-x_3=25 \end{cases}$$

Решение. Подвергаем преобразованиям расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9 \\ \quad -3x_2-2x_3=11 \\ \qquad\quad -8x_3=8 \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$(x_1=2,\ \ x_2=-3,\ \ x_3=-1)$$

Задача 2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1-5x_2-8x_3+\ \ x_4=\ \ 3 \\ 3x_1+\ \ x_2-3x_3-5x_4=\ \ 1 \\ x_1 \qquad\ \ -7x_3+2x_4=-5 \\ \quad 11x_2+20x_3-9x_4=\ \ 2 \end{cases}$$

Решение. Подвергаем преобразованиям расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Таким образом, мы пришли к системе уравнений, содержащих уравнение: $0=2$

Задача 3. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5 \\ x_1\ \ -x_2\ \ +3x_3=3 \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу системы. С помощью первого уравнения исключаем из последующих уравнений переменную x_1. Для этого ко второй строке прибавляем первую, умноженную на $-\frac{2}{1}$, к третьей строке - первую, умноженную на $-\frac{3}{1}$, к четвёртой - первую, умноженную на -1. Далее новые вторую, третью и четвёртую строки умножаем на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 5 & 12 \\ 0 & 8 & 5 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Теперь нужно с помощью второго уравнения исключить переменную x_2 из последующих уравнений. Проведём подготовительные работы. Чтобы было удобнее с отношением коэффициентов, нужно получить единицу в во втором столбце второй строки. Для этого четвёртую строку умножаем на $\frac{1}{3}$, а полученную в результате четвёртую строку меняем местами со второй строкой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 5 & 12 \\ 0 & 8 & 5 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 5 & 12 \end{array}\right)$$

Проведём теперь исключение переменной x_2 из третьего и четвёртого уравнений. Для этого к третьей строке прибавим вторую, умноженную на $-\frac{8}{1}$, а к четвёртой - вторую, умноженную на $-\frac{7}{1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Четвёртая и третья строки - одинаковые, поэтому четвёртую исключаем из матрицы. А третью умножаем на $\frac{1}{5}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Получили следующую систему уравнений, которой эквивалентна заданная система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \qquad x_2 \qquad\quad = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

x_2 и x_3 известны, а x_1 находим из первого уравнения:

$x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 6 = 1$.

Ответ: данная система уравнений имеет единственное решение (1; 1; 1).

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Задача 1. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

Задача 3. Решить, составив систему линейных уравнений.

Три куска сплава имеют общую массу 150 кг. Первый сплав содержит 60% меди, второй - 30%, третий - 10%. При этом во втором и третьем сплавах вместе взятых меди на 28,4 кг меньше, чем в первом сплаве, а в третьем сплаве меди на 6,2 кг меньше, чем во втором. Найти массу каждого куска сплава.

Задача 4. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

Задача 5. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 \qquad + 3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

2.13. Практическая работа № 13

«Решение систем линейных уравнений в матричном виде»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.3 «Системы линейных уравнений»;
- сформировать умение решать системы уравнений матричным способом;
- развитие общих компетенций по ОК 1.
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: матричный метод

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности
Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Формулы Крамера;
2. Матричный способ решения систем линейных уравнений.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению
Задачи для решения на уроке

Задача 1. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = -1 \end{cases}$$

Решение состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Составляем следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Это сделано для того, чтобы применить в решении уже записанные закономерности, основанные на свойстве обратной матрицы:

$$A \bullet X = B$$
$$A^{-1} \bullet A \bullet X = A^{-1} \bullet B$$
$$X = A^{-1} \bullet B$$

По выведенному выше последнему равенству и будем вычислять решения данной системы.

Но сначала проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной, то есть можем ли вообще применять матричный метод:

$$|A| = 2 \bullet 5 - (-1) \bullet 3 = 13.$$

Определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, можем применять матричный метод.

Шаг 2. Находим матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных:

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Находим матрицу неизвестных:

$$X = \frac{1}{13} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

Итак, получили решение:

$$x_1 = \frac{4}{13}, \quad x_2 = -\frac{5}{13}.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 2 \bullet \frac{4}{13} - \left(-\frac{5}{13} \right) = 1 \\ 3 \bullet \frac{4}{13} + 5 \bullet \left(-\frac{5}{13} \right) = -1 \end{cases}$$

Следовательно, ответ правильный.

Задача 2. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Шаг 1. Составляем следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной:

$$|A| = 2 \bullet (-2) \bullet 1 + (-1) \bullet 2 \bullet 3 + 0 -$$
$$-3 \bullet (-2) \bullet 3 - 0 - 2 \bullet 1 \bullet 2 = 18 - 14 = 4.$$

Определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, можем применять матричный метод.

Шаг 2. Находим матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \bullet \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Находим матрицу неизвестных:

$$X = \frac{1}{4} \bullet \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили решение:

$$x_1 = 1; \; x_2 = -2; \; x_3 = -1.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 2 \bullet 1 - (-2) + 3 \bullet (-1) = 1 \\ -2 \bullet (-2) + 2 \bullet (-1) = 2 \\ 3 \bullet 1 + (-2) + (-1) = 0 \end{cases}$$

Следовательно, ответ правильный.

Задача 3. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = -1 \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = \ \ 3 \\ x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Шаг 1. Составляем следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной:

$$|A| = -6.$$

Определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, можем применять матричный метод.

Шаг 2. Находим матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Находим матрицу неизвестных:

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, получили решение:

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -1;\ \ x_3 = 0$.

Задачи (задания) для самостоятельного решения.
Задача 1. Найдите решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 \quad - x_2 \quad + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

.

Задача 2. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x + 8y = 1 \end{cases}$$

Задача 3. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

2.14. Практическая работа № 14

«Выполнение операций над множествами»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 3.1.2 Основные положения теории множеств, классов вычетов
- развитие общих компетенций по ОК 9.
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать:

определения по теме;

методы решения прикладных задач.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1 Определение действий над множествами;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке:

1) Дано: **A =** $[a_1; a_2)$, **B =** $(b; +\infty)$, **C =** $(-\infty;\ c]$

Найти:	**Ответы**:
1. B$\cup$(A$\cap$C) =	1. $[a_1; +\infty)$
2. B$\cap$ (A$\cup$C) =	2. $(b; a_2)$
3. C$\cup$ (A$\cap$B) =	3. $(-\infty; a_2)$

4. C $\cap$ (A $\cup$ B) =	4. $[a_1;c]$
5. C $\cap$ (A $\cap$ B) =	5. $(b;\ c]$
6. (A $\cup$ C) $\cap$ (B $\cup$ C) =	6. $(-\infty;a_2)$
7. (A $\cap$ B) $\cup$ (A $\cap$ C) =	7. $[a_1;a_2)$
8. (A $\cup$ B) $\cap$ (B $\cup$ C) =	8. $[a_1;+\infty)$
9. (A $\cap$ C) $\cup$ (B $\cap$ C) =	9. $[a_1;c]$
10. (A $\cap$ B) $\cup$ (B $\cap$ C) =	10. $(b;a_2)$

2) Дано:A = {x | $x\ \geq a$}; B = {x | $x \leq b_1$ или $x\ \geq b_2$ }; C = {x | $c_1 < x < c_2$}

Найти:	**Ответы:**
1. A $\cup$ B $\cup$ C =	1. $(-\infty;+\infty)$
2. A $\cap$ B $\cap$ C =	2. $[a;c_2)$
3. A $\cup$ (B $\cap$ C) =	3. $(c_1;b_1]\cup[b_2;+\infty)$
4. A \ B =	4. $\varnothing$
5. A $\cup$ (C \ B) =	5. $(b_1;b_2)\cup[a;+\infty)$
6. A $\cap$ (C \ B) =	6. $\varnothing$
7. (A \ B) $\cap$ (B \ C) =	7. $\varnothing$
8. (A \ B) \ C =	8. $\varnothing$
9. (A $\cup$ B) \ (A $\cap$ B) =	9. $(-\infty;b_1]\cup[b_2;a)$
10. (A $\cup$ B) $\cap$ C =	10. $(c_1;b_1]\cup[b_2;c_2)$
11. A $\cap$ (B $\cup$ C) =	11. $[a;+\infty)$
12. (A $\cap$ B) $\cup$ C =	12. $(c_1;+\infty)$
13. B \ C =	13. $(-\infty;c_1]\cup[c_2;+\infty)$
14. (A $\cup$ C) \ B =	14. $(b_1;b_2)$
15. (A $\cap$ C) \ B =	15. $\varnothing$
16. (A $\cap$ C) \ (B $\cap$ C) =	16. $\varnothing$
17. (A \ C) \ (B \ C) =	17. $\varnothing$
18. (A $\cup$ C) \ (A $\cap$ B) =	18. $(c_1;a)$
19. (B $\cap$ C) \ (A $\cap$ C) =	19. $(c_1;b_1]\cup[b_2;a)$
20. (B \ C) \ (A \ C) =	20. $(-\infty;c_1)$

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

1. Запиши путем перечисления элементов множество букв в словах:

а) голова, б) прапорщик, в) бизнесмен. После этого запишите перечислением элементов пересечение этих трех множеств.

2. Запиши путем перечисления элементов множество цифр в числах:

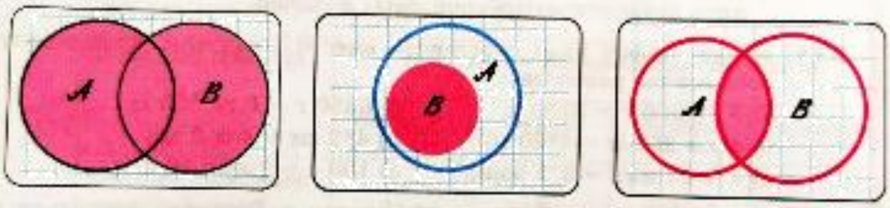
а) 56 652; б) 1 025 352.

3. Запишите перечислением элементов пересечение множеств А и В, если:

А = {3; 5;7; 27; 14; 9} , В = {9; 3; 7; 27; 14}.

4. Запишите перечислением элементов объединение элементов множеств M и N , если: M = {a; в, с, x} , N = {a; в; x; y; z}.

5. Установите соответствие между каждым рисунком и символьным обозначением подмножества, пересечения и объединения множеств.



А Б В

1) $A \cup B$; 2) $A \subset B$; 3) $A \cap B$; 4) $B \subset A$.

Ответ запишите в такую таблицу, объяснения в данном задании не нужны.

А	Б	В

6. Даны два множества А = {1, 2, 3, 4, 6, 12} и В = {1, 2, 3, 6, 9, 18}. Запишите пересечение, объединение множеств. Напишите такое подмножество С, состоящее из наибольшего числа элементов, такое, чтобы:

а) оно было подмножеством для обоих множеств А и В одновременно;

б) было подмножеством только множества А;

в) было подмножеством только множества В.