Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Академия управления городской средой, градостроительства и печати»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебно-производственной работе
_________________ О.В. Фомичева
«26» декабря 2023 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению практических работ
по учебной дисциплине
ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности
10.02.05 Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем

Санкт-Петербург
2023 г.

Методические рекомендации рассмотрены на заседании методического совета СПб ГБПОУ «АУГСГиП»

Протокол № 2 от «29» ноября 2023 г.

Методические рекомендации одобрены на заседании цикловой комиссии общетехнических дисциплин и компьютерных технологий

Протокол № 4 от «21» ноября 2023 г.

Председатель цикловой комиссии: Караченцева М.С. ________________

Разработчики: преподаватели СПб ГБПОУ «АУГСГиП»

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая тетрадь по выполнению практических работ предназначена для организации работы на практических занятиях по учебной дисциплине «Математика», которая является важной составной частью в системе подготовки специалистов среднего профессионального образования по специальности 10.02.05 «Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем».

Практические занятия являются неотъемлемым этапом изучения учебной дисциплины и проводятся с целью:

- формирования практических умений в соответствии с требованиями к уровню подготовки обучающихся, установленными рабочей программой учебной дисциплины;
- обобщения, систематизации, углубления, закрепления полученных теоретических знаний;
- готовности использовать теоретические знания на практике.

Практические занятия по учебной дисциплине «Математика» способствуют формированию в дальнейшем при изучении профессиональных модулей следующих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

В методических рекомендациях предлагаются к выполнению практические работы, предусмотренные учебной рабочей программой дисциплины «Математика».

При разработке содержания практических работ учитывался уровень сложности освоения студентами соответствующей темы, общих и профессиональных компетенций, на формирование которых направлена дисциплина.

Рабочая тетрадь по учебной дисциплине «Математика» имеет практическую направленность и значимость. Формируемые в процессе практических занятий умения могут быть использованы студентами в будущей профессиональной деятельности.

Рабочая тетрадь предназначена для студентов колледжа, изучающих учебную дисциплину «Математика» и могут использоваться как на учебных занятиях, которые проводятся под руководством преподавателя, так и для самостоятельного выполнения практических работ, предусмотренных рабочей программой во внеаудиторное время.

Практические работы проводятся в учебном кабинете, не менее двух академических часов, обязательным этапом является самостоятельная деятельность студентов.

Оценки за выполнение практических работ выставляются по пятибалльной системе. Оценки за практические работы являются обязательными текущими оценками по учебной дисциплине и выставляются в журнале теоретического обучения.

1. Перечень практических работ по дисциплине «Математика»

№ раздела, темы	Освоение умений в процессе выполнения работы	Тема практической работы	Кол-во часов
Тема 1.1. Основы дифференциального исчисления	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	2	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	2	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	2	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	2	2
Тема 1.2. Основы интегрального исчисления	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	2	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	2	2
	• применять методы дифференциального и интегрального исчисления	2	2
Тема 1.3 Дифференциальные уравнения	• решать дифференциальные уравнения	№8 Решение дифференциальных уравнений	2
Тема 2.1. Матрицы	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 9. Действия над матрицами.	2
Тема 2.2. Определители	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 10. Вычисление определителей.	2
Тема 2.3. Системы линейных уравнений	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 11.Решение систем методом Крамера	2
	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 12. Решение 2 методом Гаусса.	2
	• выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	№ 13. Решение систем линейных уравнений в матричном виде.	2
Тема 3.1 Понятие функциональног о и степенного ряда	• выполнять операции над множествами	№ 14. Выполнение операций над множествами	2

2. Описание порядка выполнения практических работ
2.1. Практическая работа № 1

«Вычисление производных сложной функции»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 1.1 «Основы дифференциального исчисления»;
- сформировать умение находить производные высших порядков;
- развитие общих компетенций по ОК2, ОК3. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: правила вычисления производных 1 и высших порядков;
производных сложных функций.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

ФОРМУЛЫ ПРОИЗВОДНЫХ.

1. $C' = 0$
2. $(кx)' = к$
3. $(кx+в)' = к$
4. $(U+V)' = U'+V'$
5. $(U-V)' = U'-V'$
6. $(UV)' = U'V+V'U$
   $(кU)' = к(U)'$
7. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-V'U}{V^2}$
8. $(x^n) = nx^{n-1}$
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\log_a x)' = \frac{1}{X\ln A}$
14. $(\ln x)' = \frac{1}{X}$
15. $(\lg x)' = \frac{1}{X\ln 10}$
16. $(e^x) = e^x$
17. $(a^x)' = a^x\ln a$
18. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
19. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
20. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила дифференцирования.

Производная суммы и разности.

Пусть даны функции f(x) и g(x), производные которых нам известны. Тогда можно найти производную суммы и разности этих функций:

$(f + g)' = f' + g'$ **$(f - g)' = f' - g'$**

Итак, производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных. Слагаемых может быть больше. Например, **$(f + g + h)' = f' + g' + h'$.** Строго говоря, в алгебре не существует понятия «вычитание». Поэтому разность $f - g$ можно переписать как сумму $f + (-1) \cdot g$, и тогда останется лишь одна формула — производная суммы.

Примеры. Найти производные функций: $f(x) = x^2 + \sin x$; $g(x) = x^4 + 2x^2 - 3$.

Решение.

1. Функция f(x) — это сумма двух элементарных функций, поэтому: $f'(x) = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$;

2. Аналогично рассуждаем для функции g(x). Только там уже три слагаемых (с точки зрения алгебры): $g'(x) = (x^4 + 2x^2 - 3)' = (x^4 + 2x^2 + (-3))' = (x^4)' + (2x^2)' + (-3)' = 4x^3 + 4x + 0 = 4x \cdot (x^2 + 1)$.

Производная произведения.

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Формула несложная, но ее часто забывают. И не только школьники, но и студенты. Результат — неправильно решенные задачи.

Примеры. Найти производные функций: $f(x) = x^3 \cdot \cos x$; $g(x) = (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x$.

Решение.

1. Функция f(x) представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому: $f'(x) = (x^3 \cdot \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x)$

2.У функции g(x) первый множитель сложней, но общая схема от этого не меняется. Очевидно, первый множитель функции g(x) представляет собой многочлен, и его производная — это производная суммы. Имеем:

$g'(x) = ((x^2 + 7x - 7) \cdot e^x)' = (x^2 + 7x - 7)' \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot (e^x)' = (2x + 7) \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x = e^x \cdot (2x + 7 + x^2 + 7x - 7) = (x^2 + 9x) \cdot e^x = x(x + 9) \cdot e^x$.

Обратите внимание, что на последнем шаге производная раскладывается на множители. Формально этого делать не нужно, однако большинство производных вычисляются не сами по себе, а чтобы исследовать функцию. А значит, дальше производная будет приравниваться к нулю, будут выясняться ее знаки и так далее. Для такого дела лучше иметь выражение, разложенное на множители.

Производная частного.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Примеры. Найти производные функций:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad g(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

Решение.

1.В числителе и знаменателе каждой дроби стоят элементарные функции, поэтому все, что нам нужно — это формула производной частного:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

2. $$g'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2}$$

По традиции, разложим числитель на множители — это значительно упростит ответ:

$$g'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{xe^x(2-x)}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x}$$

2.Производная сложной функции.

Сложная функция — это не обязательно формула длиной в полкилометра. Например, достаточно взять функцию f(x) = sin x и заменить переменную x, скажем, на x^2 + ln x. Получится f(x) = sin (x^2 + ln x) — это и есть сложная функция. У нее тоже есть производная, однако найти ее по правилам, рассмотренным выше, не получится. Как быть? В таких случаях помогает замена переменной и формула производной сложной функции: **$f'(x) = f'(t) \cdot t'$, если x заменяется на t(x).**

Как правило, с пониманием этой формулы дело обстоит еще более печально, чем с производной частного. Поэтому ее тоже лучше объяснить на конкретных примерах, с подробным описанием каждого шага.

Примеры. Найти производные функций: $f(x) = e^{2x+3}$; $g(x) = \sin(x^2 + \ln x)$

Решение.

1.Заметим, что если в функции f(x) вместо выражения 2x + 3 будет просто x, то получится элементарная функция $f(x) = e^x$. Поэтому делаем замену: пусть 2x + 3 = t, $f(x) = f(t) = e^t$. Ищем производную сложной функции по формуле: $f'(x) = f'(t) \cdot t' = (e^t)' \cdot t' = e^t \cdot t'$.А теперь — внимание! Выполняем обратную замену: t = 2x + 3. Получим: $f'(x) = e^t \cdot t' = e^{2x+3} \cdot (2x+3)' = e^{2x+3} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x+3}$

2.Теперь разберемся с функцией g(x). Очевидно, надо заменить $x^2 + \ln x = t$. Имеем: $g'(x) = g'(t) \cdot t' = (\sin t)' \cdot t' = \cos t \cdot t'$.Обратная замена: $t = x^2 + \ln x$. Тогда: $g'(x) = \cos(x^2 + \ln x) \cdot (x^2 + \ln x)' = \cos(x^2 + \ln x) \cdot (2x + 1/x)$.

Таким образом, вычисление производной сводится к избавлению от этих самых штрихов по правилам, рассмотренным выше. В качестве последнего примера вернемся к производной степени с рациональным показателем:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Немногие знают, что в роли n вполне может выступать дробное число. Например, корень — это $x^{0,5}$. А что, если под корнем будет стоять что-нибудь навороченное? Снова получится сложная функция — такие конструкции любят давать на контрольных работах и экзаменах.

Примеры. Найти производную функции:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 7}$$

Решение. Для начала перепишем корень в виде степени с рациональным показателем: $f(x) = (x^2 + 8x - 7)^{0,5}$. Теперь делаем замену: пусть $x^2 + 8x - 7 = t$. Находим производную по формуле: $f'(x) = f'(t) \cdot t' = (t^{0,5})' \cdot t' = 0,5 \cdot t^{-0,5} \cdot t'$.

Делаем обратную замену: $t = x^2 + 8x - 7$. Имеем:

$f'(x) = 0,5 \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5} \cdot (x^2 + 8x - 7)' =$

$0,5 \cdot (2x + 8) \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5}$.

Наконец, возвращаемся к корням:

$$f'(x) = \frac{0,5 \cdot (2x+8)}{\sqrt{x^2+8x-7}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x-7}}$$

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Задача 1.

Найти производные данных функций.

1.1. а) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$;

в) $y=\ln\sin(2x+5)$; г) $y=x^{x^7}$;

1.2. а) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y=4(\sin x)/\cos^2 x$;

в) $y=arctge^{2x}$; г) $y=x^{1/x}$;

1.3. а) $y=x\sqrt{\left(1+x^2\right)/\left(1-x\right)}$; б) $y=1/tg^2 2x$;

в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y=x^{\ln x}$;

1.4. а) $y=\left(3+6x\right)/\sqrt{3-4x+5x^2}$; б) $y=\sin x-x\cos x$;

в) $y=x^m\ln x$; г) $y=x^{-tgx}$;

1.5. а) $y=x/\sqrt{a^2-x^2}$; б) $y=\left(\sin^2 x\right)/\left(2+3\cos^2 x\right)$;

в) $y=\left(x\ln x\right)/\left(x-1\right)$; г) $y=\left(arctgx\right)^{\ln x}$;

1.6. а) $y=1/\sqrt{x^2+1}+5\sqrt[5]{x^3+1}$; б) $y=2tg^3\left(x^2+1\right)$;

в) $y=3^{arctgx^3}$; г) $y=\left(arctgx\right)^x$;

2.2. Практическая работа № 2

Геометрический смысл производной первого и второго порядка.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 1.1 «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»;
- сформировать умение решать задачи по теме, развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: правила вычисления производных 1 и высших порядков, геометрический смысл производной

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

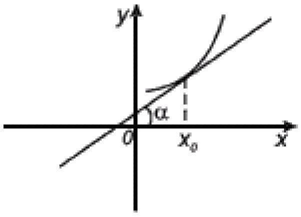
1. Геометрический смысл производной;
2. Формулы производных;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

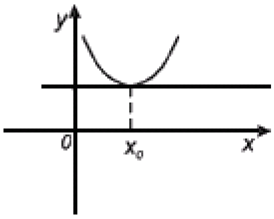
Задание для практической работы
и инструктаж по ее выполнению
Задачи для решения на уроке

. Геометрический смысл производной.

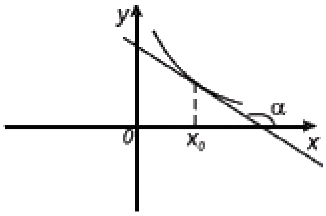
Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке: к = $y'(x_0)$.



$f'(x_0) = tg\alpha > 0$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$



$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

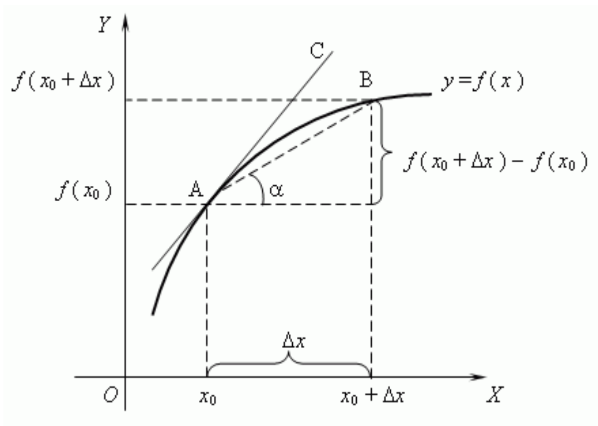


Рис. 1

Видим, что для любых двух точек *A* и *B* графика функции:

$\frac{f(x0+\Delta x) - f(x0)}{\Delta x} = tg\ \alpha$, где α - угол наклона секущей *AB*.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку *A* и двигать по направлению к ней точку *B*, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая *AB* приближается к касательной *AC*. Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке *A*.

Отсюда следует: **Значение производной функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.**

Справочный материал.

Геометрический смысл производной.

к = tgα = f'(x_0)

Уравнение касательной

$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$

Уравнение нормали

$y-y_0 = -\frac{1}{f'(x0)}(x-x_0)$

Условия:

параллельности прямых: $к_1 = к_2$ перпендикулярности прямых: $к_1 к_2 = -1$

Пример 1. На параболе $y = x^2 - 2x - 8$ найти точку M, в которой касательная к ней параллельна прямой $4x + y + 4 = 0$.

Решение. Определим угловой коэффициент касательной к параболе
$y = x^2 - 2x - 8$: $k = y' = (x^2 - 2x - 8)' = 2x - 2$.
Найдем угловой коэффициент прямой $4x + y + 4 = 0$: $y = -4x - 4$, $k = -4$. Касательная к параболе и данная прямая, по условию, параллельны. Следовательно, их угловые коэффициенты равны, т.е. $2x - 2 = -4$; $x = -1$ – абсцисса точки касания. Ординату точки касания M вычислим из уравнения данной параболы $y = x^2 - 2x - 8$, то есть $y(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 8 = -5$, M(-1;-5).
Ответ: M(-1;-5).
Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x+e^{-2x}$, параллельной прямой $y = -x$.
Решение. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания x_0. Так как касательная параллельна прямой $y = -x$, значит ее угловой коэффициент равен -1.Таким образом, $f'(x_0) = -1$.
Найдём производную функции: $f' = 1 - 2e^{-2x}$
Прировняем производную к -1: $1 - 2e^{-2x} = -1$

$$2e^{-2x} = 2$$
$$e^{-2x} = 1$$
$$x = 0$$

Уравнение касательной: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$
Уравнение касательной: $y = 1-1(x-0) = 1-x$
Ответ: $y = 1-x$.
Пример 3. Для параболы $y = x^2 - 4x$ написать уравнение касательной в точке с абсциссой, равной 1.
Решение. Уравнение касательной имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.
1.Найдём производную функции: $y' = 2x - 4$
2. Найдём значение производной в точке $x_0 = 1$: $y'(1) = 2\cdot 1 - 4 = -2$
3. Найдём значение функции в точке $x_0 = 1$: $y(1) = 1 - 4 = -3$
4. Подставим полученные числа в формулу касательной:
$y = -3 + (-2)(x - 1)$
$y = -3 - 2x + 2$
$y = -2x - 1$
Ответ: уравнение касательной имеет вид $y = -2x - 1$
2.Физический смысл производной.
$V = S'$; $a = V' = S''$
Если материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)$, то производная функции $y = s(t_0)$ выражает мгновенную скорость материальной точки в момент времени t_0, т.е. $v = s'(t_0)$.
Замечание: при решении задач будем считать, что если $s'(t_0) = 0$, то в момент времени t_0 точка останавливается.
Пример 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где $x(t)$ — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$с.
Решение.
1.Найдем производную функции: $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$
$x' = 12t - 48$
2. Найдем значение производной в точке $t = 9$: $x' = 60$

Ответ: 60 м/с.

Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x = t^2 - 13t + 23$, где x(t) - расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

Решение.

Если нам известна скорость точки в некий момент времени, следовательно известно значение производной в точке t_0. Найдем производную функции

$x = t^2 - 13t + 23$, $x^| = 2t - 13$

По условию, скорость точки равна 3 м/с, значит, значение производной в момент времени t_0 равно 3. Получаем уравнение:

$2t - 13 = 3$

$2t = 16$

$t = 8$

Ответ: 8

Пример 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$, где x(t) - расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Решение. Найдем производную функции: $x = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$, $x^| = t^2 - 6t - 5$.

По условию, скорость точки равна 2 м/с, значит, значение производной в момент времени t_0 равно 2. Получаем уравнение: $t^2 - 6t - 5 = 2$

Решим его:

$t^2 - 6t - 5 = 2$

$t^2 - 6t - 7 = 0$

$t_1 = 7$ $t_2 = -1$ – не подходит по смыслу задачи: время не может быть отрицательным.

Ответ: 7

Пример 4. Прямолинейное движение точки совершается по закону:

$S = (t^3 — 2)$ м. Определить ускорение в момент $t = 10$ сек.

Решение. Ускорение $a = V^{//}$. Дифференцируя функцию $S = t^3 — 2$, находим $V^{//} = 6t$.

Следовательно, $a = 6t = 6 \cdot 10 = 60$; $a = 60$ м/сек^2.

Пример 5. Если движение неравномерное, то сила F, производящая его, непостоянна, каждому моменту времени t соответствует определенное значение действующей силы F, и сила, таким образом, есть функция времени t, F=f(t).

По закону Ньютона, в каждый момент времени действующая сила F равна произведению массы т на ускорение а, то есть F=ma, или f(t) = ma.

При прямолинейном движении $a = V^{//}$, поэтому $f(t) = m\,V^{//}$.

Зная уравнение прямолинейного движения, можно дифференцированием найти значение действующей силы в каждый момент времени.

Пример 6. Определить силу, под действием которой материальная точка совершает прямолинейные колебания по закону $S = A\cdot\sin(\omega t + \omega_0)$.

Решение. $f(f) = m\,V^{//}$, поэтому находим вторую производную функции:

$S = A\cdot\sin(\omega t + \omega_0)$, $ds/dt = A\cdot\cos(\omega t+\omega_0)\cdot\omega$,

$V^{//} = - A\cdot\sin(\omega t + \omega_0)\cdot\omega^2 = - s\omega^2 = - \omega^2 s$; $f(t) = - m\omega^2 s$,

то есть рассматриваемые колебания совершаются под действием силы, пропорциональной перемещению s и направленной в противоположную сторону.

Упражнения для самостоятельной работы:

Ознакомительный уровень.

1. Составить уравнение касательной:

$y = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$.

2. Составить уравнение нормали:

$y = x^2 - 2x$, $x_0 = 0$.

Репродуктивный уровень.

3. Найти скорость движения точки и ускорение через 2 секунды от начала движения, если формула для вычисления пути равна: $S = 2t^3 + 2t^2 - 3t + 4$ м.

Продуктивный уровень.

4. Найти точки графика функции $y = e^x + e^{-x}$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = \frac{3}{2}x$.

2.3. Практическая работа № 3

Нахождение промежутков монотонности и экстремумов функции.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 1.1 «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»;
- умение исследовать функцию с помощью производной;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: правила вычисления производных 1 и высших порядков

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Задание для практической работы
и инструктаж по ее выполнению
Задачи для решения на уроке

1.Монотонность функции.

Под монотонностью понимают возрастание и убывание функции.

Алгоритм нахождения промежутков монотонности функции.

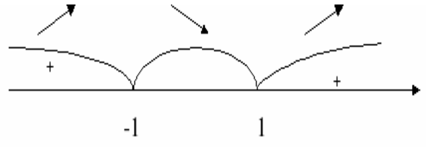
1.Найти область определения функции.
2.Найти производную функции.
3.Найти корни производной и точки, в которых производная не существует.
4.Наносим полученные точки на область определения функции.
5.Определяем знаки **производной** в каждом из полученных промежутков.
6.а) Если **производная** положительна на промежутке (а; в), то функция возрастает на промежутке (а; в).
б) Если **производная** отрицательна на промежутке (а; в), то функция убывает на промежутке (а; в).

Пример 1: Исследовать на возрастание и убывание функцию: $y = x^3 – 3x + 2$

Решение:

Находим производную: $y' = 3x^2 - 3$. Производная обращается в нуль при значениях: $3x^2 – 3 = 0$

$x_1 = 1$
$x_2=-1$



Следовательно, функция f(x) возрастает на промежутке $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, функция убывает на промежутке $(-1;1)$.

Пример 2. Найти промежутки возрастания и убывания функции: $y = xe^{-3x}$

Решение: Найдем производную функции: $y' = e^{-3x} - 3xe^{-3x}$.

Приравняем производную к нулю: $e^{-3x}(1-3x) = 0$, откуда $x = \frac{1}{3}$.

При $x < \frac{1}{3}$, $y' > 0$, следовательно, при $x < \frac{1}{3}$, функция возрастает, а при $x > \frac{1}{3}$, $y' < 0$, следовательно, при $x > \frac{1}{3}$, функция убывает.

Пример: Найти промежутки монотонности функции $y = x^4 - x^3$.

1. $D(y) = R$
2. $y'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$
3. $y'(x) = 0$, $x = 0$ и $x = 3/4$
4. При $x \geq \frac{3}{4}$ и при $x \leq 0$ производная положительна, следовательно функция возрастает на этих промежутках; при $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$ производная отрицательна, следовательно функция убывает на этом промежутке.

Пример 3. Найти интервалы возрастания функции: $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

Найдите интервалы, принадлежащие области определения функции, на которых ее производная положительна.

Решение: Область определения функции: любое действительное число, кроме 1 и -1.

Найдем производную и исследуем ее знак: $y' = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$

С учетом области определения интервалы возрастания: $(0;1) \cup (1;\infty)$

Ответ: $(0;1) \cup (1;\infty)$

2.Экстремумы функции.

Алгоритм нахождения экстремумов функции.

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную функции.
3. Найти корни производной и точки, в которых производная не существует.
4. Наносим полученные точки на область определения функции.
5. Определяем знаки производной в каждом из полученных промежутков.
6. а) Если производная положительна на промежутке (а; в), то функция возрастает на промежутке (а; в).

   б) Если производная отрицательна на промежутке (а; в), то функция убывает на промежутке (а; в).
7. Если при переходе через точку x_0 производная изменяет свой знак с «-» **на** «+», то точка **x_0 – точка минимума**. Если при переходе через точку x_0 производная изменяет свой знак с «+» **на «-«**, то x_0 – **точка максимума.**
8. Чтобы найти экстремумы, необходимо найти значения функции в точках экстремумов.

Пример 1. Исследовать функцию на экстремум: $y = x^2 - 4x$.

1. Находим область определения: любое действительное число.
2. Находим производную функции: $y' = 2x - 4$
3. Находим корни производной: $2x - 4 = 0$, $2x = 4$, $x = 2$.

4. Определяем знаки производной при x< 2 и при x > 2:

при x< 2, $y^/$< 0, при x > 2, $y^/$> 0, значит при переходе через x=2 прпоизводная функции изменяет свой знак с минуса на плюс. По теореме x=2 – точка минимума. Определим минимум функции: $y_{min}(2) = 4 – 8 = -4$.

Ответ: $y_{min}(2) = -4$.

Пример 2.

Найдите точку максимума функции на отрезке [−10; −1]:

$$y = \frac{x^2 - 8x + 25}{x}$$

Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 8x + 25}{x}\right)' = \cdots = \frac{x^2 - 25}{x^2}$$

Поскольку это дробно-рациональная функция, приравниваем к нулю числитель: $x^2 - 25 = 0$;

$x_1 = 5$; $x_2 = -5$.

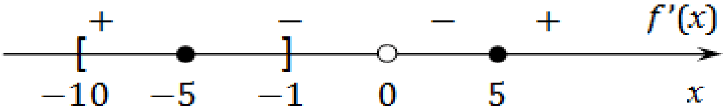
Получили два корня. Теперь приравниваем к нулю знаменатель:

$x^2 = 0$;

$x = 0$.

Получили $x = 0$ — корень второй кратности. При переходе через него знак производной не меняется. Отмечаем точки $x = -5$; $x = 0$;

$x = 5$ на координатной прямой, а затем расставить знаки и границы.



Очевидно, что внутри отрезка останется лишь одна точка $x = -5$,в которой знак производной меняется с плюса на минус. Это и есть точка максимума.

Ответ: -5

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию: $y = \frac{x+2}{x-2}$.

1.Область определения функции: любое числор, кроме x = 2.

2. Найдём производную функции: $y^/ = \frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}$.

3. Находим корни производной и точки, в которой производная не существует: корней нет, так как числитель не равен нулю.

Производная не существует, когда знаменатель равен нулю, следовательно $x_{1,2} = 2$.

4.Производная имеет знак минус и правее 2, и левее 2. Имеем, что производная не меняет свой знак при переходе через критические точки.

Ответ: функция экстремумов не имеет.

Упражнения для самостоятельной работы:

Ознакомительный уровень.

1.Исследовать функцию на монотонность: $y = -x^2+12x$.

2.Найти точки экстремумов

функции: $y = 3x^2-6x+15$.

Репродуктивный уровень.

3.Исследовать функцию на монотонность и экстремумы: $y = \frac{x+4}{x+8}$

Продуктивный уровень.

4. Найти промежутки возрастания и убывания функции: $y = \ln x^3$.

5. Определить экстремумы функции: $y = \frac{3x}{x^2+1}$.

2.4. Практическая работа № 4.

Построение графиков функций при помощи производной.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 1.1 «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»;
- сформировать умение выполнять построение графика функции, умение исследовать функцию с помощью производной;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: правила вычисления производных 1 и высших порядков

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Монотонность функции;
2. Экстремумы функции;
3. Алгоритм построения графика функции.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы
и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Рассмотрим примеры решения типовых задач на применение производной.

Пример 1. Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

Решение:

1) Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$.

2) Сумма этих чисел равна $x + \frac{36}{x}$.

3) По условия задачи x – положительное число. Итак, задача сводится к нахождению значения x – такого, при котором функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x > 0$.

4) Найдем производную: $f'(x) = 1 - 36/x^2 =((x + 6)(x - 6)) / x^2$.

5) Стационарные точки $x_1 = 6$, $x_2 = -6$. На интервале $x > 0$ есть только одна стационарная точка $x = 6$. При переходе через точку $x = 6$ производная меняет знак «–» на знак «+», и поэтому $x = 6$ – точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале $x > 0$ функция $f(x) = x + 36/x$ принимает в точке $x = 6$ (это значение $f(6) = 12$).

Ответ: $36 = 6 \cdot 6$.

Пример 2.

1.Функция спроса имеет вид Q=100 – 20p, постоянные издержки TFC составляют 50 денежных единиц, а переменные издержки TVC на производство единицы продукции – 2 денежные единицы. Найти объём выпуска, максимизирующий прибыль монополиста.

Решение:

Прибыль есть выручка минус издержки:

П=TR – TC, где TR= p ·Q; TC=TFC+TVC.

Найдём цену единицы продукции: $20p = 100 – Q \Rightarrow p = 5 – \frac{Q}{20}$.

Тогда: П=(5 – Q/20)Q – (50 + 2Q)= – Q2 + 60Q - 1000 ® max

Найдём производную: П'(Q)= –2Q+60.

Приравняем производную к нулю: $–2Q+60=0 \Rightarrow Q=30$.

При переходе через точку Q=30 функция П(Q) меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума, и в ней функция прибыли достигает своего максимального значения. Таким образом, объём выпуска, максимизирующий прибыль, равен 30 единицам продукции.

Пример 3. Марсель решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал другу юности Денису шкатулку из драгоценного металла. В мастерскую он принес кусок листа из этого металла размером 80 X 50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.

Решение: Обозначим через x длину стороны вырезаемого квадрата. Легко видеть, что $0<x<25$.

Объем при этом у коробки: $V = x (80-x) (50 – 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

$V' = 12x^2 - 520x + 4000 = 0$ $x_1 = 100:3 = 33\frac{1}{3}$, $x_2= 10$.

x_1- посторонний корень по смыслу задачи.

$x_2= 10$ – единственное решение – высота,

80 – 20 = 60 – длина, 50 – 20 = 30 – ширина.

$V = 10 \cdot 60 \cdot 30 = 18000$(см³).

Задача 1.

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график (с помощью производной первого и второго порядков)

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

1) Область определения:

$D(y)=(-\infty;+\infty)$

$$2)\, y(-x)=\frac{4(-x)}{4+(-x)^2}=-\frac{4x}{4+x^2}=-y(x),$$

т.е. функция является нечётной.

3) $y(0)=0$

$(0;0)$ - точка пересечения графика с осями координат.

4) Функция всюду непрерывна в своей области определения. Вертикальных асимптот нет.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{4+x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}}{\frac{4}{x^2}+1}=0$$

$y=0$ - горизонтальная асимплота.

$$5)\; y'=\frac{4(4+x^2)-4x*2x}{(4+x^2)^2}=$$

$$=\frac{16+4x^2-8x^2}{(4+x^2)^2}=\frac{16-4x^2}{(4+x^2)^2}=0$$

$$x^2=4\Rightarrow x_1=2;x_2=-2$$

$$y'(-3)=\frac{16-36}{(4+9)^2}<0,\qquad y'(0)=\frac{16}{16}>0$$

$$y'(3)=\frac{16-36}{(4+9)^2}<0,\qquad y(-2)=\frac{-8}{4+4}=-1$$

Упражнения для самостоятельного решения.

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график (с помощью производной первого и второго порядков)

2.1. $y=4x/\left(4+x^2\right);$ 2.2. $y=\left(x^2-1\right)/\left(x^2+1\right);$

2.3. $y=\left(x^2+1\right)/\left(x^2-1\right);$ 2.4. $y=x^2/\left(x-1\right);$

2.5. 2.5. $y=x^3/\left(x^2+1\right);$ **2.6.** $y=\left(4x^3+5\right)/x;$

2.5. Практическая работа № 5

Вычисление неопределенных интегралов.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала **Тема 1.2. Основы интегрального исчисления** сформировать умение находить неопределенный интеграл;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: основные методы интегрирования

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Неопределенный интеграл;
2. Метод непосредственного интегрирования;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы
и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Задача 1

Найти неопределенные интегралы:

Справочный материал.

1. $\int X^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$
3. $\int (kx+b)\,dx = \frac{1}{k}\ln(kx+b) + c$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$
5. $\int e^x\,dx = e^x + c$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}\,x + c$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x + c$
10. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \mathrm{arctg}\,x + c$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$
13. $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$
14. $\int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + c$
15. $\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + c$
16. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + c$
17. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$
18. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

1.Вычисление неопределённых интегралов.

Примеры. Найти интегралы:

1. $\int (3x^2 + 4x - 6)\,dx = x^3 + 2x^2 - 6x + C$

$\int \left(x^2 + 6x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ … $\frac{3}{2}$ … $\frac{2}{5}$ … $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{2}$ … $\int$

; 3. $\left(\quad\right)dx$ 4. $\frac{d}{x}$ $5x^3 + 2x - 3$ $\frac{}{x\sqrt[4]{x}}$ — $\frac{}{2x\sqrt{x}}$

Решение.

2. $\int\left(\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{1}{5}\right)dx=\int\frac{3}{2}x^2dx+\int 6x\,dx-\int\frac{1}{5}dx=$

$=\frac{3}{2}\int x^2dx+6\int x\,dx-\frac{1}{5}\int dx=\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-\frac{1}{5}x+C=\frac{x^3}{2}+3x^2-\frac{x}{5}+C$.

3. $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}+\frac{5}{x^2}\right)dx=\int\left(2x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{5}{4}}+5x^{-2}\right)dx=$

$=2\int x^{-\frac{2}{3}}dx+\int x^{-\frac{5}{4}}dx+5\int x^{-2}dx=2\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}}+5\frac{x^{-1}}{-1}+C=6\sqrt[3]{x}-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}-\frac{5}{x}+C$.

4. Предварительно числитель подынтегральной функции почленно разделим на знаменатель, затем последовательно применим формулы:

$\int\frac{5x^3+2x-3}{2x\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{5}{2}x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}\right)dx=\frac{5}{2}\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{3}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx=$

$=\frac{5}{2}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x^3+2x+3}{\sqrt{x}}+C$.

5. $\int\left(-\frac{5}{x^3}\right)dx=-5\int x^{-3}dx=-5\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=-5\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{2x^2}{5}+C$;

6. $\int\frac{2dx}{3x\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\int x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{4}{3\sqrt{x}}+C$;

6. $\int\frac{3dx}{4}=\frac{3}{4}\int 1dx=\frac{3}{4}\int x^0dx=\frac{3}{4}\frac{x^{0+1}}{0+1}+C=\frac{3}{4}x+C$;

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Задача 1.

Найти неопределенные интегралы. В пунктах а и б результаты проверить дифференцированием.

1.1. а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$; б) $\int\frac{arctg\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

в) $\int\frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.2. а) $\int\frac{xdx}{\left(x^2+4\right)^6}$; б) $\int e^x\ln\left(1+3e^x\right)dx$;

в) $\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; г) $\int\frac{dx}{\sin x+tgx}$.

1.3. а) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x3^x dx$;

в) $\int\frac{(3x-7)\,dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

1.4. а) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\,(3tgx+1)}$;

б) $\int x \arcsin x \, dx;$

в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

1.5. а) $\int \frac{\cos 3xdx}{4+\sin 3x}$; б) $\int x^2e^{3x}dx$;

в) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; г) $\int \frac{\cos xdx}{1+\cos x}$.

1.6. а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx$;

в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$; г) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$.

Задача 2

Скорость прямолинейного движения тела в любой момент времени t равна $V=3t^2+4t$ (м/с). Найти расстояние, пройденное телом в любой момент времени от начала отсчета, если через 2 с оно равно 15 м.

2.6. Практическое занятие №6

Вычисление неопределенных интегралов методом подстановки

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала **Тема 1.2. Основы интегрального исчисления** сформировать умение находить неопределенный интеграл;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: основные методы интегрирования, метод подстановки

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Неопределенный интеграл;
2. Метод непосредственного интегрирования;
3.Подстановка в неопределённом интеграле;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы
и инструктаж по ее выполнению
Задачи для решения на уроке

2.Метод подстановки.

Всякая формула интегрирования сохраняет вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от неё, т. е. если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от x.

Это правило очень важно. Основная таблица интегралов в силу этого правила оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией её. Покажем на примерах как пользоваться этим методом.

Примеры:

1. $$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{5}} = \begin{vmatrix} \frac{x}{5} = t \\ \frac{dx}{5} = dt \\ dx = 5dt \end{vmatrix} = 5\int \frac{dt}{\cos^2 t} = 5tgt + C = 5tg\frac{x}{5} + C.$$

2. $$\int e^{-7x}dx = \begin{vmatrix} t = -7x \\ dx = -7dx \\ dx = -\frac{dt}{7} \end{vmatrix} = \int e^t\left(-\frac{dt}{7}\right) = -\frac{1}{7}\int e^t dt = -\frac{1}{7}e^t + C = -\frac{1}{7}e^{-7x} + C.$$

3. $$\int (x+1)^{11}dx = \begin{vmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int t^{11}dt = \frac{t^{12}}{12} + C = \frac{(x+1)^{12}}{12} + C$$

4. $$\int \cos(2-x)dx = \begin{vmatrix} t = 2-x \\ dt = -dx \\ dx = -dt \end{vmatrix} = \int \cos(-dt) = -\int \cos t dt = -\sin t + C = -\sin(2-x) + C$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}} = \begin{vmatrix} t = 3x+2 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{3\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2} + C = \frac{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}{2} + C$$

6. $$\int e^{x^2}2xdx = \begin{vmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

7. $$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+1} = \begin{vmatrix} t = x^2+3x+1 \\ dt = (2x+3)dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+3x+1\right| + C$$

8. $$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \begin{vmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{vmatrix} = \int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + C$$

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

1) $\int \cos^2 2x\, dx$

2) $\int x\sqrt[3]{5x^2+1}\, dx$

3) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$

4) $\int \frac{x^4dx}{x_5+1}$

5) $\int \frac{1}{x_2}e^{\frac{3}{x}}dx$

6) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}dx$

7) $\int x^3 \sin 3x^4 dx$

8) $\int (3x^2 - x + 2)(6x - 1)dx$

9) $\int e^{x^2+5x+1}(2x+5)dx$

10) $\int \frac{7x\,dx}{1-x^2}$

11) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$

12) $\int \frac{4x+1}{2x^2+x}dx$

13) $\int x^2\, 6^{1-x^3}\, dx$

14) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}}dx$

15) $\int \frac{2x^2dx}{\cos^2 x^3}$

16) $\int \frac{2\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{2x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$

18) $\int \frac{x+4}{x^2+1}dx$

19) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

20) $\int \frac{2x-3}{4+3x-x^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\left(6+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[3]{x^2}}$

22) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

23) $\int \frac{3dx}{x\ln^2 x}$

24) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos xdx$

25) $\int \frac{ctgx}{\sin^2 x}dx$

26) $\int \frac{\sin x}{\cos^7 x}dx$

27) $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$

28) $\int tgxdx$

29) $\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

30) $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$

2.7. Практическое занятие №7.

Вычисление определенных интегралов

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала **Тема 1.2. Основы интегрального исчисления;** сформировать умение находить неопределенный интеграл; умение вычислять определённый интеграл и применять его к решению практических задач;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: формулу Ньютона-Лейбница; методы интегрального исчисления.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Формула Ньютона-Лейбница;
2. Свойства определенного интеграла;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению
Задачи для решения на уроке

Свойства определённого интеграла.

1.Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3.При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4.Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

5.Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Для вычисления определенного интеграла от функции f(x), в том случае если можно найти соответствующую первообразную F(x), служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Примеры: Вычислить определенные интегралы.

$$1.\int_{-1}^{0} (3x^2+1)dx = (x^3+x)\Big|_{-1}^{0} = 0-(-1-1) = 2$$

$$2.\int_1^2 \frac{3dx}{x} = 3\ln x\Big|_1^2 = 3(\ln 2 - \ln 1) = 3\ln 2$$

$$3.\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{\cos^2 t} = 2tgt\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(tg\frac{\pi}{4} - tg0) = 2$$

§2. Вычисление площадей плоских фигур.

1.Пусть f(x)>0, x = a, x = b, y =0, тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, находится по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. Пусть f(x) <0, x=a, x=b, y=0, тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, находится по формуле:

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

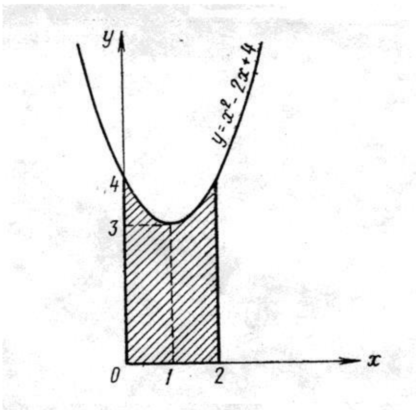
3.Если функция f(x) конечное число раз меняет знак на отрезке [a; b], то формула каждый раз составляется индивидуально с учетом формул (1) и (2).

4. Пусть f(x) >g(x) на отрезке [a; b], тогда площадь фигуры, ограниченной функциями f(x), g(x), x = a, x=b определяется по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Пример1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 4$, x=0, x=2, y=0

Решение:

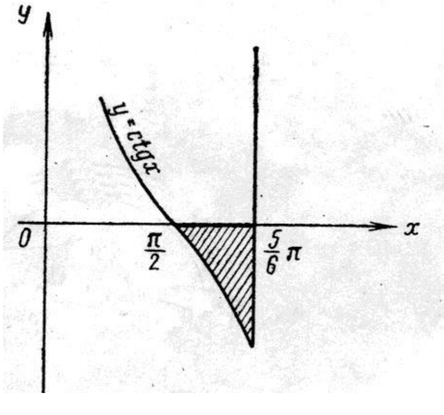


Фигура, площадь которой нужно вычислить, является криволинейной трапецией, ограниченной сверху кривой, снизу осью Ох, слева осью Оу, справа прямой x=2.

$$S = \int_0^2 (x^2 - 2x + 4)dx = (\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x)\Big|_0^2 = 6\frac{2}{3}(кв.\text{ед.})$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = ctgx, x = \frac{5}{6}\pi, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$$

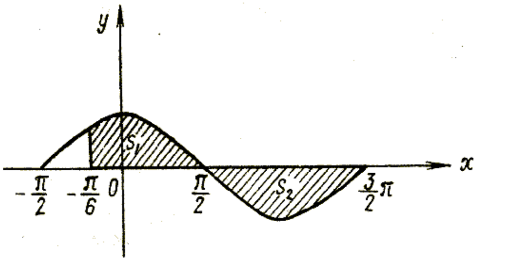


Получилась криволинейная трапеция, ограниченная сверху осью Ох, снизу котангенсоидой y = ctgx, справа прямой $x=\frac{5\pi}{6}$. Для решения задачи применяем вторую формулу, так как криволинейная трапеция находится ниже оси Ох.

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} ctgdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\cos xdx}{\sin x}=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right|\begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=\frac{1}{2}\end{matrix}\right|=-\int_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t}=-\ln t\Big|_{1}^{\frac{1}{2}}=-\ln\frac{1}{2}+\ln 1=\ln 2+0=\ln 2.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\cos x, x=-\frac{\pi}{6}, x=\frac{3}{2}\pi, y=0.$$

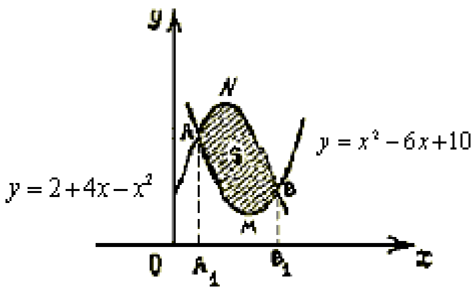


На чертеже видно, что фигура, ограниченная заданными линиями, состоит из двух криволинейных трапеций, одна из которых находится над, а другая под осью абсцисс.

$$S=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos xdx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{6})-(\sin\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{\pi}{2})=$$

3,5

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:



Для построения парабол выделим в правых частях их уравнений полные квадраты:

$$y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1;$$

$$y=2+4x-x^2=-(x-2)^2+6.$$

Найдём точки пересечения парабол: Левые части уравнений равны, значит равны и правые: $\begin{cases}y=x^2-6x+10,\\ y=2+4x-x^2,\end{cases}$

$$x^2 - 6x + 10 = 2 + 4x - x^2$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

По теореме Виета, определяем: $x_1 = 1; x_2 = 4.$

Для решения задачи воспользуемся четвёртой формулой:

$$S = \int_1^4 ((2 + 4x - x^2) - (x^2 - 6x + 10))dx = \int_1^4 (2 + 4x - x^2 - x^2 + 6x - 10)dx =$$

$$= \int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8)dx = (-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x)\Big|_1^4 = -\frac{2}{3}\cdot 64 + 5\cdot 16 - 8\cdot 4 -$$

$$-(-\frac{2}{3} + 5 - 8) = -42\cdot\frac{2}{3} + 80 - 32 + \frac{2}{3} - 5 + 8 = 9(ед^2)$$

Задача 2

Шкив вращается вокруг оси под действием момента сил *M*, который меняется с течением времени по закону *M=At, A*- известная постоянная величина. Найти угловую скорость w и угол поворота jшкива в любой момент времени, если в начальный момент шкив был неподвижен. Момент инерции шкива равен I.

Используем для решения основное уравнение динамики вращения тела

$$I\frac{d\omega}{dt} = M.$$

Отсюда $\frac{d\omega}{dt} = \frac{A}{I}\cdot t$.

Угловую скорость находим интегрированием последнего выражения, т.е.

$$\omega(t) = \int \frac{A}{I}t\,dt = \frac{A}{I}\int t\,dt = \frac{A}{2I}t^2 + C.$$

Постоянную интегрирования *C* найдем из начальных условий, т.е. из условия, что при *t*=0, w=0. Получаем, что *C*=0. Таким образом, в любой момент времени угловая скорость

$$\omega(t) = \frac{A}{2I}t^2 .$$

Учитывая, что угловая скорость и угловой путь связаны формулой

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} ,$$

найдем угловой путь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{2I}t^2 ,$$

$$\varphi = \int \frac{A}{2I}t^2\,dt = \frac{A}{2I}\int t^2\,dt = \frac{A}{6I}t^3 + C_1,$$

где *C*- постоянная интегрирования, которая вновь определяется из начального условия: при *t*=0, w=0, значит, C_1=0. Следовательно, в любой момент времени равен угол поворота шкива

$$\varphi(t) = \frac{A}{6I}t^3.$$

2. Скорость тела через *t* с после начала движения равна *V*=(4*t*+5) м/с. Определить путь, пройденный телом за *t* секунд после начала отсчета.

Учтя, что $V=\frac{dS}{dt}$, получим $\frac{dS}{dt}=(4t+5)$. Тогда

$$S=\int(4t+5)dt=4\int t dt+5\int dt=\frac{4}{2}t^2+5t+C=2t^2+5t+C$$.

Постоянную интегрирования найдем из начального условия, что при t=0 тело покоилось, следовательно, C=0. Тогда окончательно имеем
$S=2t^2+5t$ (м).

Применение определённого интеграла при решении физических задач.

1. **Задача о вычислении пути**.

Пусть материальная точка движется прямолинейно с некоторой скоростью V_0 = V(t).Требуется найти путь, который пройдет эта точка за промежуток времени от t = a до t = b.Если скорость постоянна, то S = V_0(b-a). Если скорость непостоянна поступают следующим образом: промежуток времени [a; в] разбивают точками t_0 = a, t_1,…, t_{n-1}, t_n = b на n отрезков одинаковой длины, которая определяется формулой: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, где i = 1, 2, … , n.Выбрав произвольную точку c на каждом отрезке [t_{i-1}, t_i] , составим сумму: $\sum_{i=1}^{n} V(C_i)\Delta t_i$.Это приближение будет тем лучше, чем мельче отрезки разбиения, S $=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V(C_i)\Delta t_i$. А этот предел есть определенный интеграл от функции V(t) на отрезке [$a;b$] , то есть: S = $\int_a^b V(t)dt$.

Пример 1. Тело движется прямолинейно со скоростью V (t) = ($3t^2$ + 4t + 1) м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 3 секунды.

$$S=\int_0^3(3t^2+4t+1)\,dt=(t^3+2t^2+t)\Big|_2^3=48 \text{ м.}$$

Пример 2. Тело движется прямолинейно со скоростью V(t) = (t + $6t^2$) м/с. Найти путь, пройденный телом за третью секунду.

$$S=\int_2^3(t+6t^2)\,dt=\left(\frac{1}{2}t^2+2t^3\right)\Big|_2^3=40{,}5 \text{ м.}$$

Пример 3. Определить максимальную высоту подъема камня, брошенного вертикально вверх со скоростью ($18t+3t^2$) м/с.

1.Определим время движения тела от начала движения до остановки:

$18t-3t^2=0$

$6t-t^2=0$

$t(6-t)=0$

$t_1=0 \qquad t_2=6$

2.Найдем высоту подъема:

$$H = \int_0^6 (18t - 3t^2)\,dt = 9t^2\Big|_0^6 - t^3\Big|_0^6 = 9(36-0) - (216-0) = 324 - 216 = 108 \text{ (м)}.$$

Ответ: 108 метров.

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

320. $y = x^2, x = 8, x = 0, y = 0.$

321\`. $y = 3x^4 - 4x^3, y = 0.$

322 $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = a, a > 0, y = 0.$

323 $y = tgx, x = \frac{x}{4}, y = 0, x = 0.$

329 $y = 3 - 2x, y = x^2.$

325. $y = x^3 - x^2, y = 0.$

326 $y = -x^2 + 8x - 6, y = x.$

330. $y = 3 + 2x - x^2, y = 0.$

331 $y = x + x^2, x = 1, x = 4, y = 0.$

332. $y = e^x, x = 1, x = 0, y = 0.$

333. $y = 4x - x^2, y = 0.$

334. $y = 3x^2 - 2x, y = 0.$

335. $y = x^2 + 1, y = x + 3.$

338. $y = 2x - x^2, y = -x.$

339) Скорость движения точки изменяется по закону V= $(3t^2 + 2t + 1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.
340) Скорость движения точки V = $(9t^2 - 8t)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за четвёртую секунду.
341) Скорость движения точки V = $(12t - 3t^2)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
342) Скорость движения точки V = $(6t^2 + 4)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

2.8 Практическое занятие №8

«Решение дифференциальных уравнений

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 1.3 «Дифференциальные уравнения»;
- сформировать умение решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен
знать: приемы решения дифференциальные уравнения
уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности
Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе
1. определение дифференциального уравнения;
2. уметь разделять переменные в уравнении;
Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению Определение 1. Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется уравнение вида: $p(y)dy = q(x)dx$,
в котором левая часть зависит только от одной переменной, а
правая – только от другой.
Решаются дифференциальные уравнения с разделенными переменными интегрированием обеих частей:
$\int p(y)dy = \int q(x)dx$ (2.2.)
Здесь под интегралами понимаются соответствующие первообразные.
Пример 1 Найти решение дифференциального уравнения
$dy - dx = 0$
Решение: Перенесем слагаемое
из левой части в правую, получим дифференциальное уравнение:
$dy = dx$,
которое является уравнением с разделенными переменными.
Интегрируя обе части последнего уравнения, будем иметь
$\int dy = \int dx$, $y = x + C$
Задачи (задания) для самостоятельного решения.

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
2. $2x\sqrt{1-y^2} \cdot dx + y \cdot dy = 0$.
3. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$.
4. $x \cdot (1+y^2) + y \cdot y' \cdot (1+x^2) = 0$.
5. $\sqrt{3+y^2} \cdot dx - y \cdot dy = x^2 \cdot y \cdot dy$.
6. $(y^2 + x \cdot y^2) + (x^2 - y \cdot x^2) \cdot y' = 0$.
7. $(e^{3x} + 7) \cdot dy + y \cdot e^{3x} \cdot dx = 0$.
8. $y' \cdot y \cdot \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.
9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
10. $y' = e^{x-y}$.
11. $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0$.
12. $\sqrt{4-x^2} \cdot y' + xy^2 + x = 0$.

2.9. Практическая работа № 9

«Действия над матрицами»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.1 «Матрицы»;
- сформировать умение выполнять действия над матрицами;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать:

закон ассоциативности

закон дистрибутивности

закон коммутативности

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Сложение матриц;
2. Умножение матрицы на число;
3. Свойство ассоциативности.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы
и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Задача 1.

Найти матрицу, противоположную матрице А = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения противоположной матрицы умножаем матрицу А на к = -1: - А = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Задача 2.

Найти линейную комбинацию 3А - 2В, если

А = $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала находим произведение А на $к_1 = 3$ и В на $к_2 = -2$:

3А = $\begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix}$, - 2В = $\begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем сумму полученных матриц:

3А - 2В = $\begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}$.

Задача 3.

Найти произведение АВ, если А = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. АВ = $\begin{pmatrix} 0\cdot 3+(-1)\cdot 2+2\cdot 1 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 \\ 2\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 3\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 3\cdot 3+7\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 1+7\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$.

Задача 4.

Найти произведение АВ:

а) А = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Ответ: $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

б) A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Ответ: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ -2 & -1 & 0 \\ 12 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Задача 5.

Вычислить C = A^2 + 2B, где A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 6.

Найти AB - BA, где A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 6 & -4 & -5 \\ 6 & -2 & -4 \\ 9 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача 7.

Найти AE, если A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Задача 1.

Вычислить линейные комбинации матриц:

а) 2A - B, если A = $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

б) 3A + 2B, если A = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 2.

Найти произведение AB:

а) A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

б) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Задача 3. Найти $3A \cdot 2B$, если A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 4. Найти ЕА, если Е = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, А = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

2.10. Практическая работа № 10

«Вычисление определителей»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.2 «Определители»;
- сформировать умение находить определитель, ранг матрицы;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: свойства определителя

теорему о разложении определителя

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Определитель матрицы;
2. Ранг матрицы;
3. Свойства определителя.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

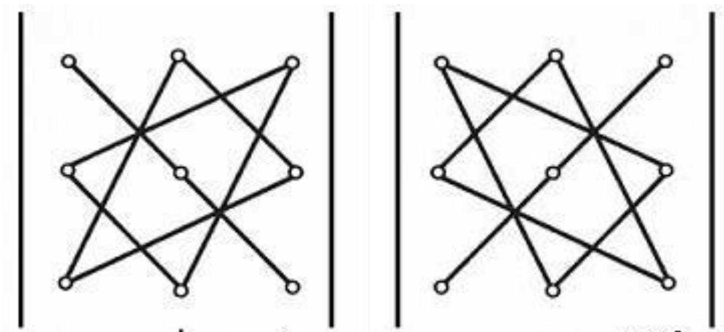
Задачи для решения на уроке

Определение. Определителем третьего порядка, составленным из чисел $a_1;b_1;c_1;a_2;b_2;c_2;a_3;b_3c_3$ называется число, определяемое равенством:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить определитель второго порядка, необходимо из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение побочной диагонали.

Существуют ещё ряд правил для вычисления определителей третьего порядка, например вот это: каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трёх его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определёнными знаками: со знаком плюс – три члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали (рис 1); со знаком минус – три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали (рис 2).



\+ рис. 1   − рис. 2

Пример: Вычислить определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$

3(-5+16)- 2(1+32)+2(2+20)=33-66+44=11

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Составить определители и вычислить:

1.$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$

2.$\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$

3.$\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 11 \\ 2x - y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 2z = 9 \end{cases}$

5.$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

6.$\begin{cases} 3x + 2y + Z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ 2x - 5y - 3z = -17 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

2.11. Практическая работа №11
Решение систем методом Крамера.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.3 «Системы линейных уравнений»;
- сформировать умение решать системы уравнений;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: метод Крамера для решения системы линейных уравнений.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности
Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Метод Крамера;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

1.Определители второго порядка. Решение линейных систем методом Крамера.

1.Число $a_1b_2 - a_2b_1$ **называется определителем 2 порядка и обозначается**

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$ **, где** $a_1;b_2$ **- элементы главной диагонали,** $a_2;b_1$ **- элементы побочной диагонали.**

Чтобы вычислить определитель 2 порядка, необходимо из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов побочной диагонали.

2.Метод Крамера для систем 2 порядка: $\begin{cases} a_1x + в_1y = c_1 \\ a_2x + в_2y = c_2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & в_1 \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix}$ $\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & в_1 \\ c_2 & в_2 \end{vmatrix}$ $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ - формулы Крамера

1. $\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 32 + 33 = 65$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 55 - 16 = 39 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{65}{13} = 5 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3$$

Ответ: (5; 3).

2. Определители 3 порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

3(-5+16) - 2(1+32) + 2(2+20) = 33-66+44=11

3. Решение линейных систем третьего порядка методом Крамера.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ $\quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ $\quad$ **z=** $\frac{\Delta z}{\Delta}$ - формулы Крамера

Пример 1.

$$\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 32 \\ 5x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + 3z = 14 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 43, \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 32 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 32$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 7 & 32 & 5 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = -43, \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 32 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{86}{43} = 2 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{43}{43} - 1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{129}{43} = 3$$

Ответ: (2; -1; 3).

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

Решить системы методом Крамера:

1) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 11 \\ 2x - y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ 2x - 5y - 3z = -17 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 12 \end{cases}$

2.12. Практическая работа №12

Решение систем методом Гаусса.

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.3 «Системы линейных уравнений»;
- сформировать умение решать системы уравнений;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: метод Гаусса для решения системы линейных уравнений.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Метод Крамера;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Задача 1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

Решение. Подвергаем преобразованиям расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9 \\ \quad -3x_2-2x_3=11 \\ \qquad\quad -8x_3=8 \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$(x_1=2,\ \ x_2=-3,\ \ x_3=-1)$$

Задача 2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1-5x_2-8x_3+\ \ x_4=\ \ 3 \\ 3x_1+\ \ x_2-3x_3-5x_4=\ \ 1 \\ x_1 \qquad\ -7x_3+2x_4=-5 \\ \quad 11x_2+20x_3-9x_4=\ \ 2 \end{cases}$$

Решение. Подвергаем преобразованиям расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Таким образом, мы пришли к системе уравнений, содержащих уравнение: $0=2$

Задача 3. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5 \\ x_1\ \ -x_2\ \ +3x_3=3 \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу системы. С помощью первого уравнения исключаем из последующих уравнений переменную x_1. Для этого ко второй строке прибавляем первую, умноженную на $-\frac{2}{1}$, к третьей строке - первую, умноженную на $-\frac{3}{1}$, к четвёртой - первую, умноженную на -1. Далее новые вторую, третью и четвёртую строки умножаем на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 5 & 12 \\ 0 & 8 & 5 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Теперь нужно с помощью второго уравнения исключить переменную x_2 из последующих уравнений. Проведём подготовительные работы. Чтобы было удобнее с отношением коэффициентов, нужно получить единицу в во втором столбце второй строки. Для этого четвёртую строку умножаем на $\frac{1}{3}$, а полученную в результате четвёртую строку меняем местами со второй строкой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 5 & 12 \\ 0 & 8 & 5 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 5 & 12 \end{array}\right)$$

Проведём теперь исключение переменной x_2 из третьего и четвёртого уравнений. Для этого к третьей строке прибавим вторую, умноженную на $-\frac{8}{1}$, а к четвёртой - вторую, умноженную на $-\frac{7}{1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Четвёртая и третья строки - одинаковые, поэтому четвёртую исключаем из матрицы. А третью умножаем на $\frac{1}{5}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Получили следующую систему уравнений, которой эквивалентна заданная система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \qquad x_2 \qquad\quad = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

x_2 и x_3 известны, а x_1 находим из первого уравнения:

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 6 = 1.$$

Ответ: данная система уравнений имеет единственное решение (1; 1; 1).

Задачи (задания) для самостоятельного решения.
Задача 1. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

Задача 3. Решить, составив систему линейных уравнений.

Три куска сплава имеют общую массу 150 кг. Первый сплав содержит 60% меди, второй - 30%, третий - 10%. При этом во втором и третьем сплавах вместе взятых меди на 28,4 кг меньше, чем в первом сплаве, а в третьем сплаве меди на 6,2 кг меньше, чем во втором. Найти массу каждого куска сплава.

Задача 4. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

Задача 5. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 \quad\quad + 3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

2.13. Практическая работа № 13
«Решение систем линейных уравнений в матричном виде»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 2.3 «Системы линейных уравнений»;
- сформировать умение решать системы уравнений матричным способом;
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;

- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать: матричный метод

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1. Формулы Крамера;
2. Матричный способ решения систем линейных уравнений.

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке

Задача 1. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = -1 \end{cases}$$

Решение состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Составляем следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Это сделано для того, чтобы применить в решении уже записанные закономерности, основанные на свойстве обратной матрицы:

$$A \bullet X = B$$

$$A^{-1} \bullet A \bullet X = A^{-1} \bullet B$$

$$X = A^{-1} \bullet B$$

По выведенному выше последнему равенству и будем вычислять решения данной системы.

Но сначала проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной, то есть можем ли вообще применять матричный метод:

$$|A| = 2 \bullet 5 - (-1) \bullet 3 = 13.$$

Определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, можем применять матричный метод.

Шаг 2. Находим матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных:

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Находим матрицу неизвестных:

$$X = \frac{1}{13} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

Итак, получили решение:

$$x_1 = \frac{4}{13}, \quad x_2 = -\frac{5}{13}.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 2 \bullet \frac{4}{13} - \left(-\frac{5}{13}\right) = 1 \\ 3 \bullet \frac{4}{13} + 5 \bullet \left(-\frac{5}{13}\right) = -1 \end{cases}$$

Следовательно, ответ правильный.

Задача 2. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Шаг 1. Составляем следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&-2&2\\3&1&1\end{pmatrix}$$

Матрица неизвестных:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной:

$$|A|=2\bullet(-2)\bullet1+(-1)\bullet2\bullet3+0-$$
$$-3\bullet(-2)\bullet3-0-2\bullet1\bullet2=18-14=4.$$

Определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, можем применять матричный метод.

Шаг 2. Находим матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных:

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\bullet\begin{pmatrix}-4&4&4\\6&-7&-4\\6&-5&-4\end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Находим матрицу неизвестных:

$$X=\frac{1}{4}\bullet\begin{pmatrix}-4&4&4\\6&-7&-4\\6&-5&-4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили решение:

$$x_1=1;\ \ x_2=-2;\ \ x_3=-1.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{cases}2\bullet1-(-2)+3\bullet(-1)=1\\-2\bullet(-2)+2\bullet(-1)=2\\3\bullet1+(-2)+(-1)=0\end{cases}$$

Следовательно, ответ правильный.

Задача 3. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Шаг 1. Составляем следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной:

$$|A| = -6.$$

Определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, можем применять матричный метод.

Шаг 2. Находим матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Находим матрицу неизвестных:

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, получили решение:

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -1;\ \ x_3 = 0$.

Задачи (задания) для самостоятельного решения.
Задача 1. Найдите решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 \ \ - x_2 \ \ + 3x_3 = 3 \end{cases}$$
.

Задача 2. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x + 8y = 1 \end{cases}$$

Задача 3. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

2.14. Практическая работа № 14

«Выполнение операций над множествами»

Цели работы:

- обобщение и систематизация материала по теме 4.1.2 Основные положения теории множеств, классов вычетов
- развитие общих компетенций по ОК 2. Организации собственной деятельности, определению методов и способов выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- воспитание ответственности за эффективность и качество выполняемую работу

Форма организации занятия – групповая

Студент должен

знать:

определения по теме;

методы решения прикладных задач.

уметь: Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Вопросы для проверки готовности студентов к практической работе

1 Определение действий над множествами;

Форма отчетности по занятию: письменное решение задач

Задание для практической работы и инструктаж по ее выполнению

Задачи для решения на уроке:

1) Дано: **A =** $[a_1; a_2)$, **B =** $(b; +\infty)$, **C =** $(-\infty; \ c]$

Найти:	**Ответы**:
1. $B \cup (A \cap C) =$	1. $[a_1; +\infty)$
2. $B \cap (A \cup C) =$	2. $(b; a_2)$
3. $C \cup (A \cap B) =$	3. $(-\infty; a_2)$
4. $C \cap (A \cup B) =$	4. $[a_1; c]$
5. $C \cap (A \cap B) =$	5. $(b; \ c]$
6. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$	6. $(-\infty; a_2)$
7. $(A \cap B) \cup (A \cap C) =$	7. $[a_1; a_2)$
8. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$	8. $[a_1; +\infty)$
9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) =$	9. $[a_1; c]$
10. $(A \cap B) \cup (B \cap C) =$	10. $(b; a_2)$

2) Дано:A = {x | $x \ \geq a$}; B = {x | $x \leq b_1$ или $x \ \geq b_2$ }; C = {x | $c_1 < x < c_2$}

Найти:	**Ответы:**
1. $A \cup B \cup C =$	1. $(-\infty; +\infty)$
2. $A \cap B \cap C =$	2. $[a; c_2)$
3. $A \cup (B \cap C) =$	3. $(c_1; b_1] \cup [b_2; +\infty)$
4. $A \setminus B =$	4. $\varnothing$
5. $A \cup (C \setminus B) =$	5. $(b_1; b_2) \cup [a; +\infty)$
6. $A \cap (C \setminus B) =$	6. $\varnothing$
7. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) =$	7. $\varnothing$
8. $(A \setminus B) \setminus C =$	8. $\varnothing$
9. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$	9. $(-\infty; b_1] \cup [b_2; a)$
10. $(A \cup B) \cap C =$	10. $(c_1; b_1] \cup [b_2; c_2)$
11. $A \cap (B \cup C) =$	11. $[a; +\infty)$
12. $(A \cap B) \cup C =$	12. $(c_1; +\infty)$
13. $B \setminus C =$	13. $(-\infty; c_1] \cup [c_2; +\infty)$
14. $(A \cup C) \setminus B =$	14. $(b_1; b_2)$
15. $(A \cap C) \setminus B =$	15. $\varnothing$
16. $(A \cap C) \setminus (B \cap C) =$	16. $\varnothing$
17. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) =$	17. $\varnothing$
18. $(A \cup C) \setminus (A \cap B) =$	18. $(c_1; a)$
19. $(B \cap C) \setminus (A \cap C) =$	19. $(c_1; b_1] \cup [b_2; a)$
20. $(B \setminus C) \setminus (A \setminus C) =$	20. $(-\infty; c_1)$

Задачи (задания) для самостоятельного решения.

1. Запиши путем перечисления элементов множество букв в словах:

а) голова, б) прапорщик, в) бизнесмен. После этого запишите перечислением элементов пересечение этих трех множеств.

2. Запиши путем перечисления элементов множество цифр в числах:
а) 56 652; б) 1 025 352.

3. Запишите перечислением элементов пересечение множеств А и В, если:

А = {3; 5;7; 27; 14; 9} , В = {9; 3; 7; 27; 14}.

4. Запишите перечислением элементов объединение элементов множеств M и N , если: M = {a; в, c, x} , N = {a; в; x; y; z}.

Ответ запишите в такую таблицу, объяснения в данном задании не нужны.

А	Б	В

6. Даны два множества А = {1, 2, 3, 4, 6, 12} и В = {1, 2, 3, 6, 9, 18}. Запишите пересечение, объединение множеств. Напишите такое подмножество С, состоящее из наибольшего числа элементов, такое, чтобы:

а) оно было подмножеством для обоих множеств А и В одновременно;

б) было подмножеством только множества А;

в) было подмножеством только множества В.